

I. forduló

1. Hány olyan tízes számrendszerbeli n -jegyű szám van, amelynek jegyei között előfordul az egyes?
2. Egy rombusz átlóinak hossza 6 és 8 egység. A rombuszba olyan szabályos háromszöget írunk, amelynek egy csúcsa a rombusz rövidebb átlójának egyik végpontja, egy oldala pedig párhuzamos a rombusz hosszabbik átlójával. Milyen hosszú ennek a háromszögnek a magassága?
3. Oldjuk meg a következő egyenletet, amelyben a és b pozitív paraméterek:

$$\left(x^3 + a^{\frac{3}{4}} \cdot x^{\frac{9}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(a^3 + a^{\frac{9}{4}} \cdot x^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = b.$$

4. Adott az $ABCDEFGH$ kocka, „alaplapja” legyen az $ABCD$ négyzet, erre merőleges élei pedig rendre AE , BF , CG és DH . Mekkora szöget zár be az ACE és CEF félsík?
5. Bizonyítsuk be, hogy egy háromszög oldalainak négyzetei akkor és csak akkor egymást követő elemei egy számtani sorozatnak, ha a súlyvonalak négyzetei is egy számtani sorozat egymást követő elemei.
6. Hány megoldása van az

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 48$$

egyenletnek a nemnegatív egész számok körében, ha még azt is megkívánjuk, hogy

$$x_1 > 5, \quad x_2 > 6, \quad x_3 > 7, \quad \text{és} \quad x_4 > 10 \quad \text{legyen.}$$

7. Adjunk meg olyan f függvényt, amely minden valós számra értelmezve van, és minden valós értéket pontosan kétszer vesz fel.
8. Az egységsugarú körbe írt ABC háromszög beírt körének középpontja K . Bizonyítsuk be, hogy ha $KA \cdot KB \cdot KC = 1$, akkor az ABC háromszög szabályos.

II. forduló

A szakközépiskolák és a gimnáziumok általános tantervű III–IV. osztályos tanulói részére

1. Jelentsen n pozitív egész számot, és legyen $a_n = n^2 + n + 1$. Bizonyítsa be, hogy az (a_n) sorozatnak végtelen sok olyan eleme van, amely egyenlő ugyane sorozat másik két elemének szorzatával!
2. A Σ síkban fekvő ABC háromszögről a következőket tudjuk:
 - a) $BC = a$ oldala rögzített;
 - b) $AD = s_a$ súlyvonalának hossza (D tehát a BC oldal felezőpontját jelöli), mértani közepe a $CA = b$ és $AB = c$ oldalak hosszának.Határozza meg a Σ sík összes olyan pontját, amely az ABC háromszög A csúcsa lehet!
3. Az O középpontú, egységsugarú körben rögzítjük az AC átmérőt, majd ugyancsak rögzítjük ennek az átmérőnek egy tetszés szerinti P belső pontját. A P ponton átmenő BD húrok közül melyikre lesz legnagyobb az $ABCD$ húrnegyszög területe?

A gimnáziumok matematika I. szakosított tantervű osztályainak III–IV. osztályos tanulói részére

1. Egy négyzetet kilenc egyenes mindegyike két olyan négyszögre bont, amelyek közül az egyik területe a másik háromszorosa. Bizonyítsuk be, hogy van olyan pont, amelyikre a kilenc egyenes közül legalább három illeszkedik!
2. A $b = 3k + 1$ alapú számrendszerben hány olyan xyz_b háromjegyű szám van, amelyben a jegyek különbözők, egyik sem nulla, és a jegyek ciklikus cseréjével adódó : xyz_b , yzx_b , zxy_b számok a felírt sorrendben számtani sorozatot alkotnak?

3. Az f függvény értéke az $x \geq 0$ valós helyen $\sum_{n \in H} \left\lfloor \sqrt{\frac{x}{n}} \right\rfloor$, ahol H azoknak a pozitív egész számoknak a halmaza, amelyek nem oszthatók 1-nél nagyobb négyzetszámmal, $[z]$ pedig a z -nél nem nagyobb egészek közül a legnagyobbat jelöli.

Határozzuk meg $f(1982)$ értékét, és a függvény $0 \leq x \leq 1982$ intervallumhoz tartozó értékkészletét!

A gimnáziumok matematika II. szakosított tantervű III–IV. osztályos tanulói részére

1. Keressük meg mindazokat a pozitív egészekből álló x , y , z számhármassokat, amelyek a következő tulajdonságúak: a számhármass bármelyik tagja osztója annak a számnak, amely eggyel nagyobb a másik kettő szorzatánál!

2. Vegyünk fel négy egységvektort a térben és tekintsük azt a 16 összegvektort, amelyek úgy állnak elő, hogy az egységvektorokat egymástól függetlenül tetszőlegesen $(+1)$ -gyel, vagy (-1) -gyel szorozzuk, majd összeadjuk őket. Mutassuk meg, hogy az összegvektorok között van 2-nél hosszabb és 2-nél rövidebb is!

3. Bizonyítsuk be, hogy a négyzetrácson elhelyezhető egy r sugarú kör úgy, hogy a körvonaltól minden rácspont távolsága legalább $\frac{1}{13r}$ legyen! (Négyzetrácson azoknak a pontoknak a halmazát értjük, amelyek mindkét koordinátája egész.)