

Az 1948. évi Kürschák József verseny második feladata a következőképpen hangzott: *Bizonyítandó, hogy a tetraéderen kívül nincs más olyan konvex poliéder, amelynek bármely két csúcsát él köti össze.* A megoldáshoz a konvex poliéderekre vonatkozó, ún. *Euler-féle összefüggést* használhatjuk fel, mely szerint

$$(1) \quad \text{lapok száma} + \text{csúcsok száma} = \text{élek száma} + 2.$$

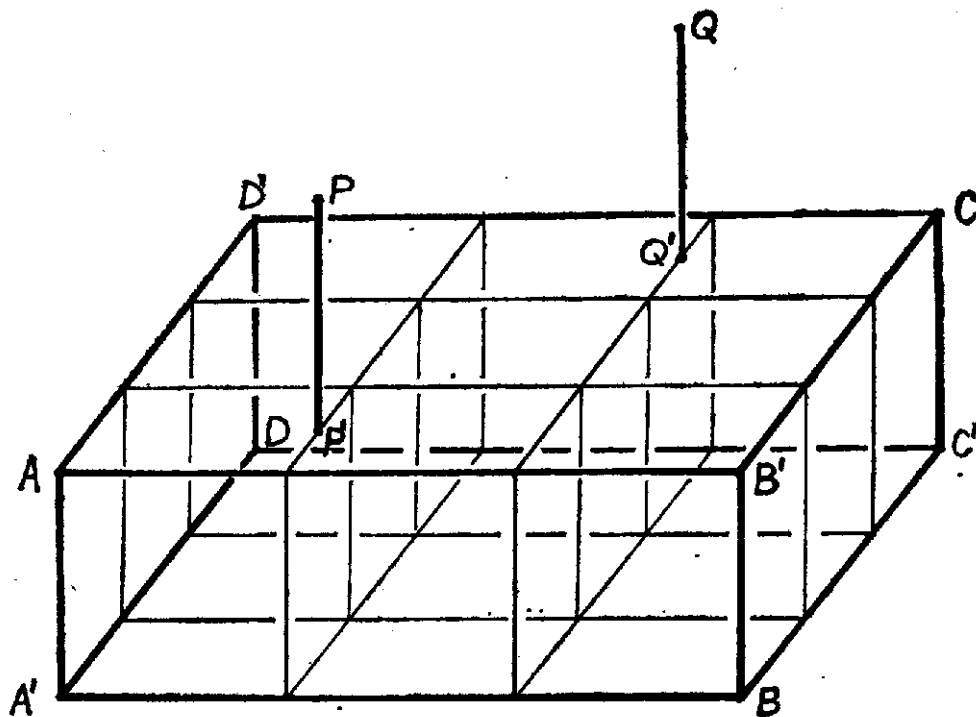
Ha a poliédernek n csúcsa van, akkor a feltétel alapján éleinek száma $\binom{n}{2}$, és mivel minden lapnak legalább 3 oldala van, a lapok száma legfeljebb $\frac{2}{3}\binom{n}{2}$. Ezeket az (1) összefüggésbe beírva,

$$\frac{2}{3}\binom{n}{2} + n \geq \binom{n}{2} + 2,$$

ahonnan azt kapjuk, hogy $(n-3)(n-4) \leq 0$. Így csak az $n=4$ eset lehetséges, vagyis a szóban forgó test csak tetraéder lehet.

A Kürschák versenyek feladatait és azok megoldásait ismertető *Hajós György-Neukomm Gyula-Surányi János: Matematikai versenytételek (Tankönyvkiadó, 1965)* című könyvben a feladat megoldásának ismertetése után a következő megjegyzés található: „A poliéder konvex voltának feltételezése nem fölösleges. Császár Ákos ... olyan hétszűcsű poliédert adott meg, amely nem konvex, és minden csúcspárját él köti össze”.

A poliédert igazán csak úgy ismerhetjük meg, ha kezünkben forgatva több oldalról is szemügyre vesszük. Itt, és a hátsó borítón ennek a poliédernek a felépítését ismertetjük. Az egyes lapok méretét nem adjuk meg, de a leírás alapján azok könnyen számíthatók (vagy szerkeszthetők).



1. ábra

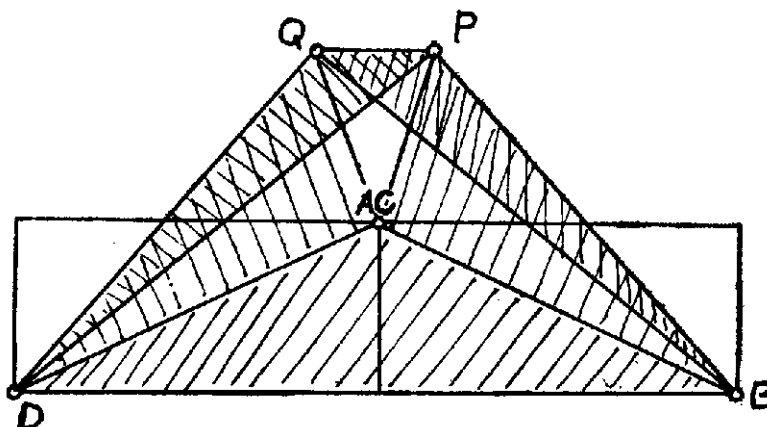
Elsőként tekintsünk egy $A'BC'DAB'CD'$ négyzetes hasábot, melynek AA' magassága harmad akkora, mint az $AB'CD'$ fedőlap egy oldalának hossza (1. ábra), azaz a négyzetes hasábot úgy is tekinthetjük, mintha 9 kisebb kockából állítottuk volna össze. Ezzel megkaptuk a hétszűcsű poliéder 4 csúcsát, ezek A, B, C és D . (Javasolt méret: $AA' = 4$ cm.) A hasáb $AB'CD'$ fedőlapjára „függőlegesen” ráállítjuk a PP' , valamint QQ' szakaszokat. Ezek hossza egyezzen meg a hasáb magasságával, és a P' pont az A csúcsú kis kocka fedőlapján az AD' éllel szemközti él felezőpontja legyen; Q' -pedig a C csúcsú kis kocka fedőlapjának a CB' -vel szemközti élét felezze. P és Q természetesen a poliéder ötödik, illetve hatodik csúcsa.

Erre a hat csúcsra több lépésben illesztjük rá a lapokat. A hátsó borítón az így kapott alakzatok két-két különböző irányú „perspektivikus”, és egy-egy felülnézeti képe látható.

1. lépés. Elsőként az ABD és CBD lapokat helyezzük el, vagyis a négyzetes hasáb A' -nél és C' -nél található sarkát „levágjuk”.

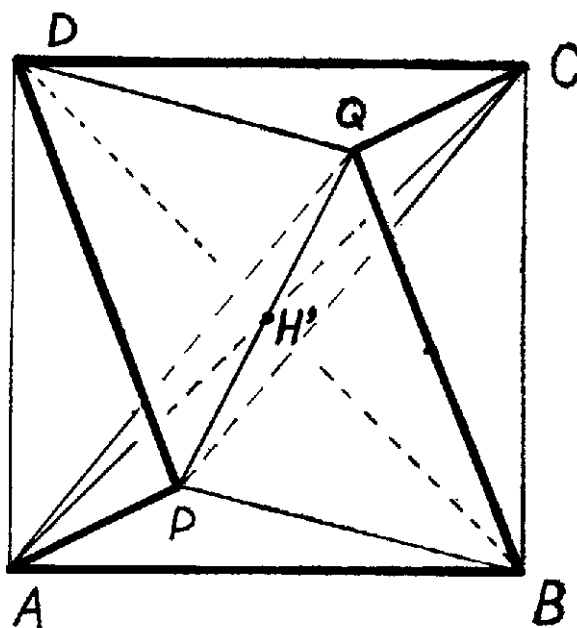
2. lépés. Az AD valamint BC éleket egy – négy háromszögből álló – „harmonikával” kötjük össze. A harmonika az ADQ, AQC, ACP és PCB háromszögekből áll, az AQC és ACP lapok konkáv szögben hajlanak egymáshoz.

Tulajdonképpen két, P és Q csúcsú hegyet csináltunk, és közöttük AC a völgy. Az alakzat az APB valamint CQD háromszögeknél lyukas, itt beláthatunk a belsejébe. (A harmonikának az előző lépésbeli háromszögek AD és BC éleihez történő ragasztásával az alakzat merevvé válik: a hat csúcs elfoglalja – a többihez képest – végleges helyét.)



2. ábra

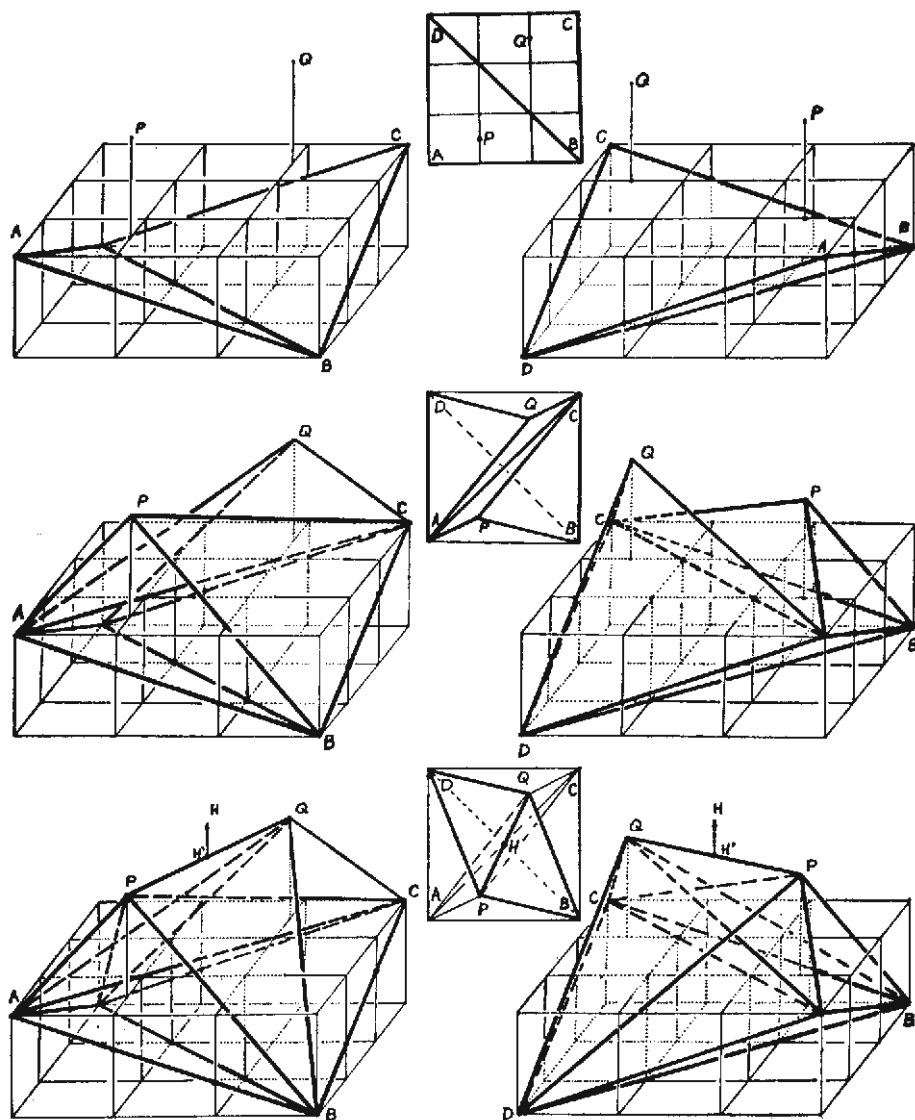
3. lépés. A harmonika BP és DQ éleit a BPQ , PQD háromszögekkel kötjük össze, ezeknek az új lapoknak a fölfelé néző oldala a poliéder belsejében lesz. (Figyelem! A BPQ és BPC , illetve DQP és DQA lapok hajlásszöge igen kicsi, körülbelül 5°). Ha alakzatunkat az AC átló irányából nézzük (2. ábra), a feltűnő nyílás a kész poliédernél is megmarad, a poliéder „lyukas test”, bár ez a lyuk a test lapjaival körül van bástyázva.



3. ábra

4. lépés. Az előző lépésben kapott alakzatot az $ABQCDPA$ zárt töröttvonal határolja (3. ábra). Más teendőnk nincs, mint erre a hat élre egy „sapkát” húzni. E célból a poliéder hetedik csúcsát, H -t a PQ szakasz H' felező-pontja fölött jó magasan választjuk (például $HH' = 5AA'$ megfelelő), majd a HAB , HBQ , stb. háromszöglapokat beragasztjuk.

Az elkészült poliéder (a javasolt $AA' = 4$ cm választással) 28 cm magas, legnagyobb szélessége ($AC = BD$) mintegy 17 cm, és a HH' egyenesre mint tengely körüli 180° -os elfordítás önmagába viszi át. Hét csúcsa van, 21 éle és 14 lapja, és bármely két csúcs között halad él.



4. ábra

Érdekességgként megemlíjtük, hogy létezik olyan test is, (persze nem konvex) mely nem tetraéder, de bármely két lapja élben találkozik.