

Havonta egy-egy, számomra valamilyen oknál fogva kedves feladatot mondok el. Ezek megoldása, noha a középiskolában oktatott ismeretanyagnál többet nem kíván, mégis mély, igazi matematikusi gondolkodást igényel. A problémákra a megjelenést követő számban megoldást adok, azonban nem kívánok egyetlen problémát sem teljesen lezárni. Akár a feladatokkal, akár azok megoldásával kapcsolatban mindenfajta megjegyzést örömmel veszek.

Csirmaz László

*

Ha adott n egész számunk ($n \geq 2$), akkor közülük mindig kiválasztható néhány (lehet, hogy csak egy), melyek összege osztható n -nel. Ez egy jól ismert „skatulya elves” feladat, általában semmit nem lehet mondani arról, hogy a kapott összeg hány tagú. Bizonyítsuk be, hogy akárhogy is veszünk $2n - 1$ darab egész számot, mindig kiválasztható közülük pontosan n , melyek összege osztható n -nel!

* * *

Jól ismert, hogy különböző pozitív egész számok reciprokainak összegeként akármilyen nagy számnál nagyobbakat kapunk. Ezt a tényt másképpen úgy fejezzük ki, hogy az ún. harmonikus sor:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

divergens. Bizonyítsuk be, hogy ha csak azokat a pozitív egész számokat tekintjük, melyek tízes számrendszerbeli alakjában nem szerepel nulla, ezek reciprokainak összege kisebb egy korlátnál.

Annak bizonyítása, hogy a harmonikus sor divergens, például a következőképpen történhet. Az $1, 1/2, 1/3, \dots, 1/9$ számok mindegyike nagyobb $1/10$ -nél, tehát

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{9} > 9 \cdot \frac{1}{10}.$$

Az $1/10, 1/11, \dots, 1/99$ számok mindegyike nagyobb $1/100$ -nál, ezért

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{99} > 9 \cdot \frac{1}{10} + 90 \cdot \frac{1}{100} = 2 \cdot \frac{9}{10}.$$

Általában ugyanezért

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{10^n - 1} > 9 \cdot \frac{1}{10} + 90 \cdot \frac{1}{100} + \dots + 9 \cdot 10^{n-1} \cdot \frac{1}{10^n} = n \cdot \frac{9}{10}.$$

Így valóban, különböző természetes számok reciprokainak összegeként akármilyen nagy számot elő tudunk állítani.

A feladat állítását is hasonló módszerrel bizonyítjuk. Mivel a nullát nem tartalmazó n jegyű számokból pontosan 9^n darab van (minden helyi értéken a kilenc lehetséges számjegy bármelyike előfordulhat), s ezeknek a számoknak az értéke nagyobb 10^{n-1} -nél, ezért reciprokuk összege kisebb, mint $9^n/10^{n-1}$. Most ha veszünk véges sok különböző pozitív egészet, melyek egyike sem tartalmazza a nulla számjegyet, és közülük a legnagyobb éppen n jegyű, akkor reciprokuk összege legfeljebb

$$(1) \quad 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} + \dots + \frac{1}{10^n - 1} < 9 + \frac{9^2}{10} + \dots + \frac{9^n}{10^{n-1}}.$$

Felhasználva azt, hogy $0 < x < 1$ esetén

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x} < \frac{1}{1 - x}$$

kapjuk, hogy (1) jobb oldalának értéke

$$9 \left(1 + \frac{9}{10} + \dots + \left(\frac{9}{10} \right)^{n-1} \right) < 9 \cdot \frac{1}{1 - 9/10} = 90.$$

Így akárhány ilyen szám reciprokát is tekintjük, ezek összege sohasem haladhatja meg a 90-et. Ezzel bizonyítottuk az állítást.

Érezhető, hogy a most kapott felső korlát eléggé elnagyolt becslés, és a reciprokok összege meg sem közelítheti a 90-et. Valóban, ha az összes, legfeljebb ötjegyű, nulla jegyet nem tartalmazó egész reciprokát adjuk össze, az összeg mindössze 9,83 körüli, s minden további tag hozzáadása is legfeljebb 0,000 01-gyel változtatja meg ezt az értéket. Azt gondolhatnánk tehát, hogy ez a 9,83 már nagyon közel van a lehető legjobb felső korláthoz, és például az összegek 10 fölé már nem is kerülhetnek. Ez azonban *nem így van*, itt érvényes a „sok kicsi sokra megy” elve. A legjobb felső korlát pontos megbecslése egyáltalán nem könnyű feladat. A legegyszerűbb módszer, vagyis az, hogy addig adogatjuk össze a reciprokokat, míg az összeg már „csak nagyon kicsit változik”, nem működik: a 25 (huszonöt!) jegyű számok reciprokait is figyelembe véve az összeg még mindig több mint eggyel kisebb a pontos értéknél, mely 5 tizedes jegyre 23,103 45.