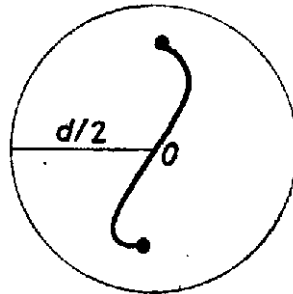


Az alábbi feladatot, mely R. *Bellman* amerikai matematikustól származik, D. O. Skljarszkij–N. N. Csencov–I. M. Jaglom: Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből 2/2. Geometriai egyenlőtlenségek és szélsőérték feladatok c. gyűjteményben találtam (40. feladat):

*Egy turista eltévedt az erdőben, ismeri az erdő alakját és méretét, de nem tudja, ő maga hol van. Tervezzük meg azt a minimális hosszúságú útvonalat, amelyet követve biztosan kijut az erdőből!*

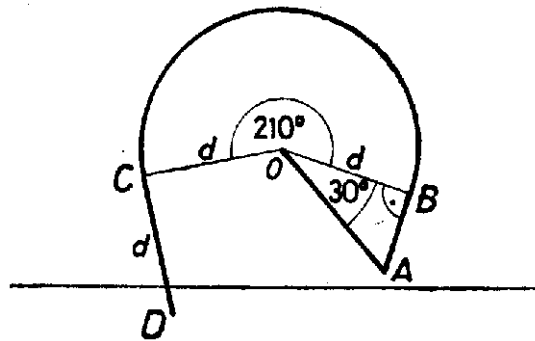
A feladatot az erdő alakjától függően több esetben vizsgáljuk. Az első kettőben a minimális hosszúságú kivezető utat a feladatgyűjtemény ismerteti.

1. *Az erdő alakja kör.* A megoldás: Haladjunk mindig egy irányban, így legfeljebb  $d$  egység megtétele után kijutunk az erdőből, ahol  $d$  a kör átmérője. Állítjuk, hogy ez a legrövidebb útvonal, amit követve feltétlenül kijut a turista az erdőből. Ugyanis tegyük fel, hogy létezik rövidebb útvonal. Helyezzük ennek középpontját (hosszának felezési pontját) a kör középpontjába,  $O$ -ba. Ha  $O$ -ból a végpontok valamelyike felé megyünk, nem juthatunk  $d/2$ -nél messzebbre, hiszen az útvonal hossza kisebb  $d$ -nél. Így az útvonal végétől indulva nem juthatunk ki az erdőből, tehát nem létezik  $d$ -nél rövidebb út (1. ábra).



1. ábra

2. *Az erdő félsík alakú,* és tudjuk, hogy az erdő szélétől legfeljebb  $d$  távolságra vagyunk.



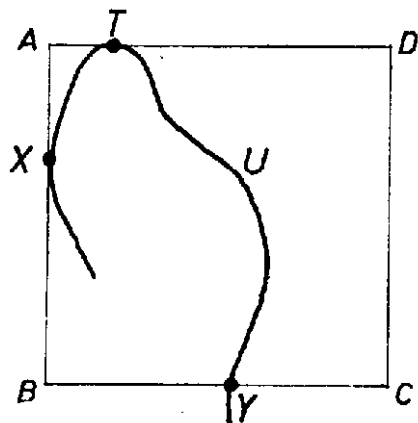
2. ábra

A 2. ábrán látható a legrövidebb kivezető útvonal. Az  $OABCD$  útvonal hossza kb.  $6,40 d$ , amiből  $OA = 2d/\sqrt{3}$ ,  $AB = d/\sqrt{3}$ ,  $BC = 7d\pi/6$  és  $CD = d$ . Ennek bizonyítása a fent említett feladatgyűjtemény szerint megtalálható J. R. *Isbell*, An optimal search pattern (Naveb. Res. Logist. Quart. 1957. 4. szám 357–359. oldal) című cikkében.

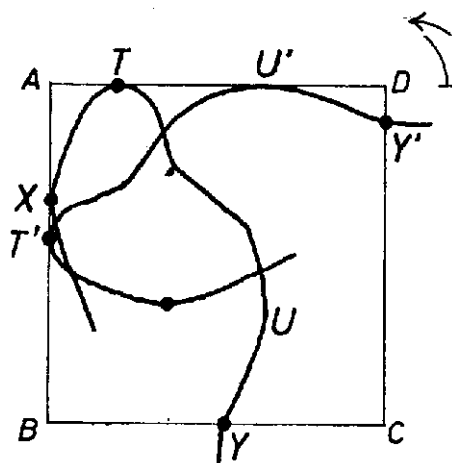
3. *Az erdő  $d$  szélességi sáv,* illetve olyan  $d$  oldalú téglalap, melynek másik oldala legalább  $2,278 d$ .

Erre az esetre V. A. *Zalgaller* adott megoldást, de ezt nem sikerült megtalálnom.

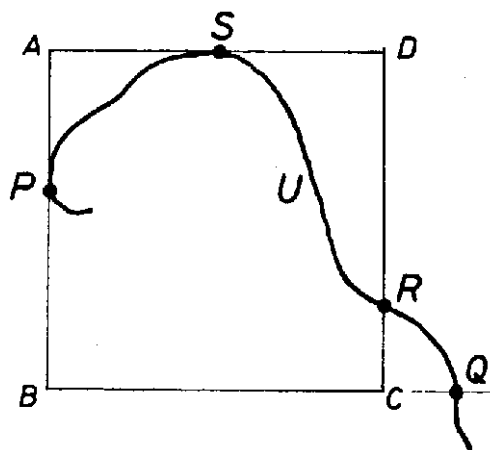
4. *Az erdő alakja négyzet.* A minimális hosszúságú kivezető út  $d$  oldalú négyzet esetén a következő. Haladjunk egy kitűzött irányban; legfeljebb  $d\sqrt{2}$  utat (az átló hosszát) megtéve kijutunk az erdőből. Tegyük fel, hogy az  $U$ -val jelzett útvonal mindig kivezet a négyzet belsejéből. Megmutatjuk, hogy  $U$  hossza legalább  $d\sqrt{2}$ .



3. ábra



4. ábra



5. ábra

Ha  $U$ -t el tudjuk helyezni a négyzet belsejében úgy, hogy nem metszi annak egyik oldalát sem, akkor az útvonal rossz, hiszen nem vezet ki az erdőből. Jelöljük egy  $d$  élű négyzet csúcsait  $A, B, C, D$ -vel. Helyezzük el  $U$ -t az  $AB$  és  $AD$  félegyenesek által határolt síknegyedben úgy, hogy az  $AB$ , illetve  $AD$  félegyenesekkel legalább egy közös pontja legyen és teljes egészében ezeknek a félegyeneseknek a  $C$  csúcsot tartalmazó oldalára essen, azaz  $AB$  és  $AD$  az  $U$  támaszegyenesei legyenek. Az előbbieket miatt  $U$  metszi vagy  $BC$ -t, vagy  $DC$ -t, vagy mindkettőt (a „metszés” azt jelenti, hogy van közös pontjuk), mert különben  $U$ -t az  $AC$  átlóval párhuzamosan megfelelően kis távolsággal eltolva, az útvonal teljes egészében a négyzet belsejébe kerülne. A szimmetria miatt feltehetjük, hogy  $U$  a  $BC$ -t metszi. Tehát  $U$ -nak van (legalább) egy  $X$  pontja az  $AB$ -n, egy  $Y$  pontja a  $BC$ -n és egy  $T$  pontja az  $AD$  oldalegyenesen (3. ábra).

Forgassuk  $U$ -t az óramutató járásával ellenkező irányban, és közben toljuk is el úgy, hogy  $AB$  és  $AD$  minden pillanatban támaszegyenes maradjon.  $U$  folytonosságából következik, hogy ez az „érintve-forgó” mozgás folyamatos, s így helyes a következő gondolatmenet: kezdetben  $U$  metszi  $BC$ -t. A forgatás minden pillanatában metszenie kell  $BC$  és  $DC$  közül legalább az egyiket.  $90^\circ$ -os elforgatás után  $T$  az  $AB$ -re,  $Y$  a  $DC$  oldalegyenesre kerül, vagyis  $U$  metszi  $DC$ -t (4. ábra). Tehát volt olyan helyzete  $U$ -nak, amikor  $BC$ -t és  $DC$ -t is metszette. Ebben a helyzetben  $U$ -nak a négyzet minden oldalegyenesén van legalább egy pontja, hiszen  $AB$  és  $AD$  támaszegyenesek.

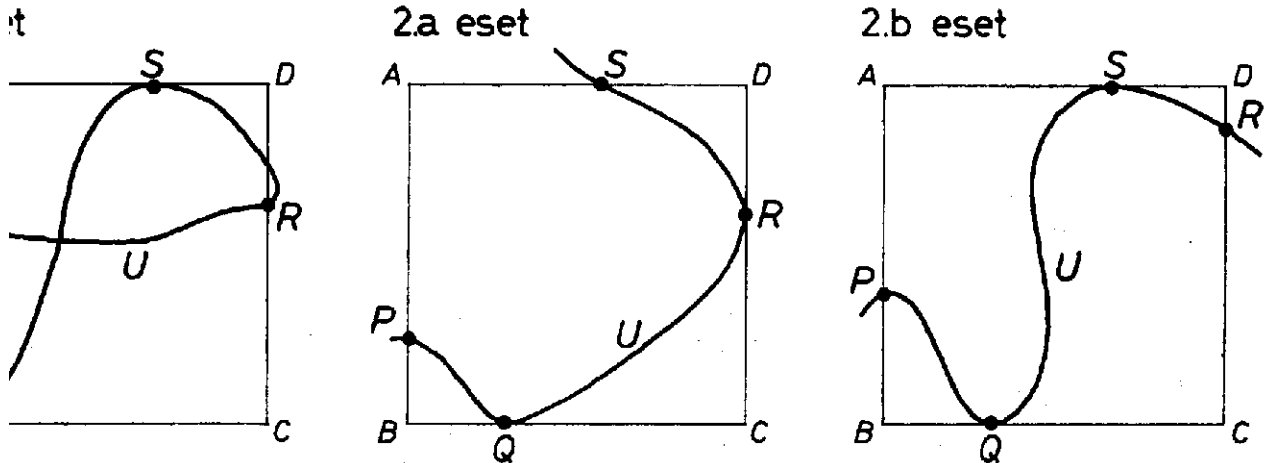
Jelöljük a négy metszéspontot  $P, Q, R, S$ -sel, amelyek rendre az  $AB, BC, DC, AD$  oldalegyeneseken vannak (lehetnek az oldalak meghosszabbításán is, 5. ábra). Vizsgáljuk meg, milyen sorrendben köti össze  $U$  ezeket a pontokat! Feltehetjük, hogy  $P$  az első. Ekkor lényegében két esetet különböztethetünk meg:

1. A második pont a szemközti oldalegyenesen van, azaz a második pont az  $R$ , továbbá feltehetjük, hogy a harmadik pont az  $S$  és az utolsó a  $Q$  (6. ábra). Ekkor  $PR \geq AD$  és  $SQ \geq AB$ , így  $U$  hossza  $\geq PR + RS + SQ \geq AD + AB > BD$ .

2. A második pont az  $AB$ -vel szomszédos oldalegyenesen van, legyen ez például a  $Q$ . Most még két eset maradt:

2a) A harmadik pont az  $R$  és a negyedik az  $S$ . Az  $RDS$  és a  $PBQ$  derékszögű háromszögben  $RD \leq RS$  és  $BQ \leq PQ$ .

2b) A harmadik pont az  $S$  és a negyedik az  $R$ . Ekkor  $SD \leq RS$  és  $BQ \leq PQ$ , tehát a 2. esetben az út hossza csökken (legalábbis nem nő), ha  $P$  helyett  $B$ -ből megyünk  $Q$ -ba és  $S$ , illetve  $R$  helyett  $D$ -ben fejezzük be az utat. Így viszont a megtett út legalább  $BD$ , tehát  $U$  hossza  $\geq BD$ .



6. ábra

Minden esetben azt találtuk tehát, hogy  $U$  hossza nem kisebb az átló hosszánál, és ezt akartuk bizonyítani.

A bizonyítás általánosítható *téglalpra* bizonyos megkötéssel:

Ha feltesszük, hogy  $U$ -nak van olyan helyzete, melyben egyszerre metszi a távolabbi oldalpárt, akkor a bizonyítás közvetlenül átvihető, azaz  $U$  nem rövidebb a téglalap átlójánál. Ha viszont ez nem igaz, akkor  $U$ -t bármilyen irányba is fordítjuk, mindig a két távolabbi oldal közé esik, tehát  $U$ -nak mindig metszenie kell az egymáshoz közelebbi párhuzamos oldalakat. Legyen ezek távolsága  $h$ , ekkor a megoldás ugyanolyan, mint egy  $h$  szélességű sávban. Ez a következőt jelenti:

Egy téglalapban az oldalak arányától függően vagy az átló a megoldás, vagy megegyezik a sávra vonatkozó megoldással (határesetben a kettő azonos eredményt adhat). Sajnos nem ismerem Zalgaller megoldását, így nem tudom, hol a határ, de ez biztosan kisebb az általa megadott 2,278-nál és nagyobb, mint  $\sqrt{3} \approx 1,732$ . Tehát ha egy téglalapban az oldalak aránya nem nagyobb  $\sqrt{3}$ -nál, akkor a legjobb stratégia elindulni egy kiválasztott irányban, s így legfeljebb az átló megtétele után kijutunk az erdőből. Ilyen téglalap az összes páros oldalú szabályos sokszögben található, ha kiválasztunk négy megfelelő csücsöt. A szabályos hatszögben az oldalak aránya éppen  $\sqrt{3}$ .

5. *Az erdő alakja páros oldalú szabályos sokszög.* Az a stratégia, amelyik biztosan kivezet a sokszögből, kivezet a beleírt téglalpból is, így az út hossza legalább akkora, mint az átló, azaz a sokszög köré írt kör átmérője. Ez pedig megvalósítható, hiszen tetszőleges irányban haladva mindig kijutunk legfeljebb az átmérő megtétele után.

Összefoglalva: körből, téglalpból (az oldalak aránya  $\leq \sqrt{3}$ ), páros oldalú szabályos sokszögből akkor jutunk ki leghamarabb, ha elindulunk egy kiválasztott irányban. Így legfeljebb a köré írt kör átmérőjével egyenlő hosszú utat kell megtenni.

Megoldatlan a probléma szabályos háromszögre és általában páratlan oldalú szabályos sokszögekre. Érdekes, hogy egy szabályos háromszög alakú erdőből biztosan ki lehet jutni anélkül is, hogy az oldal hosszának megfelelő utat megtennénk. Több ilyen útvonalat is találtak, de a legrövidebb út még ismeretlen. A feladatot átvihetjük három dimenzióba is. Például melyik az a legrövidebb térgörbe, amelyik biztosan kivezet egy testből? Gömbre hasonló a megoldás, mint a síkban a körre, de kockára a bizonyítás már nem vihető át.