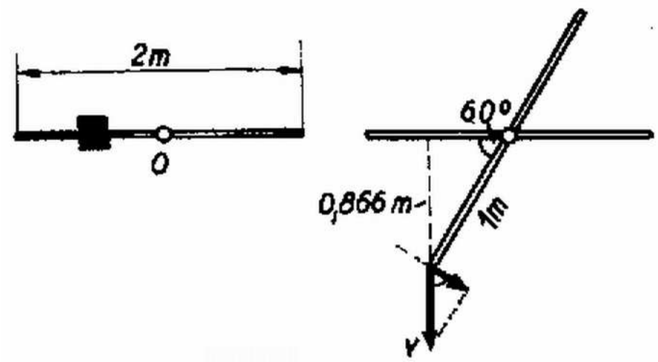
Az I. forduló feladatai

1. *Egy 2 méter hosszú pálca közepén csapágyazva van (1. ábra). Az egyik végétől* $0,5$ *méterre egy* 3 kg *tömegű test van a pálcára csúsztatva. A pálca tömege a* 3 kg*-hoz képest, valamint a súrlódás elhanyagolható;* $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$*. A pálcát vízszintes helyzetéből elengedjük. Mekkora sebességgel megy át a pálca vége a függőleges helyzetén?*

(Dr. Bodó Zalán)



1. ábra

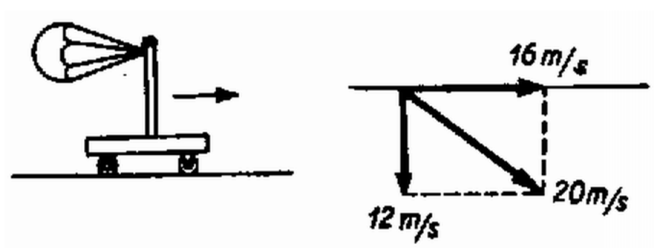
Megoldás. A 3 kg tömegű test szabadon esik. A $0,866$ méteres szabadesés végsebessége $v = \sqrt{2gs} = 4,16$ m/s. Ennek érintőleges összetevője a bot végének sebessége:

$$4,16 \cdot \cos 60^\circ = 2,08\ \mathrm{m/s}.$$

2. *Egy sínen haladó jármű magas rúdra kötött fékező ernyőt vontat* 16 m/s *sebességgel (2. ábra). Az ernyő súlya elhanyagolható. Szélcsendes időben a vontatási teljesítmény* 32 kW*. Mekkora teljesítmény szükséges a fékező ernyő ugyanazon sebességű vontatásához, ha az útra merőlegesen* 12 m/s *sebességű oldalszél fúj?*

(Nagy László)

Megoldás. A teljesítmény egyenlő az erő és sebesség szorzatával: $P = Fv$. Oldalszél esetében az ernyő levegőhöz viszonyított sebessége: $\sqrt{16^2 + 12^2}$ m/s $= 20$ m/s.



2. ábra

Tehát a sebesség 20/16 arányában lett nagyobb. Mivel a közegellenállási erő a sebesség négyzetével arányos, ezért a közegellenállási erő $(20/16)^2$ arányában növekedett. Azonban ennek az erőnek csak az útmenti összetevője, tehát az eredeti közegellenállási erő

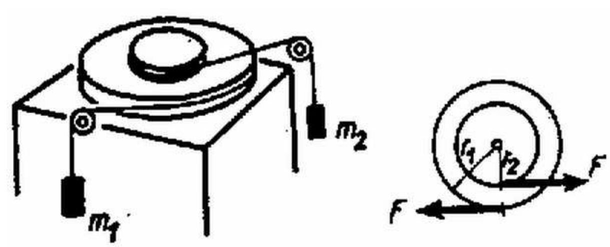
$$(20/16)^2 \cdot (16/20) = 20/16 - \text{szorosa}$$

végez munkát. A sebesség változatlan, tehát oldalszél esetében a vontatáshoz szükséges teljesítmény:

$$32 \cdot (20/16)\mathrm{kW} = 40\ \mathrm{kW}.$$

3. *Egy mereven összeerősített kettős korong sugarai* $r_1 = 0,3$ m *és* $r_2 = 0,2$ m*, tehetetlenségi nyomatéka* $\Theta = 0,25\ \mathrm{kg \cdot m^2}$*. A korong egy légpárnás asztalon fekszik, a súrlódás a korong és az asztal között elhanyagolható (3. ábra). Mindegyik korong peremére egy-egy fonál van felcsévélve. A nagyobbik korong fonalán* $m_1 = 5$ kg *tömegű test lóg. Mekkora legyen a kisebbik korong fonalán lógó test* m_2 *tömege, hogy a kettős korong tengelye egyhelyben maradjon?* ($g = 10\ \mathrm{m/s^2}$.)

(Holics László)



3. ábra

Megoldás. A korongra ható erők eredője nulla kell, hogy legyen. Ezért az F fonálerőknek egyenlőknek és párhuzamosaknak kell lenniük, ekkor erőpár jön létre, amelynek csak forgatónyomatéka van, de a korong tengelyét nem mozdítja el. A kettős korong β szöggyorsulással forog, m_1 gyorsulása (lefelé) $r_1\beta$ a fonálerő $F = m_1 g - m_1 r_1 \beta, m_2$ gyorsulása (lefelé) $r_2\beta$, a fonálerő $F = m_2 + m_2 r_2 \beta$. Az erőpár forgatónyomatéka hozza létre a szöggyorsulást:

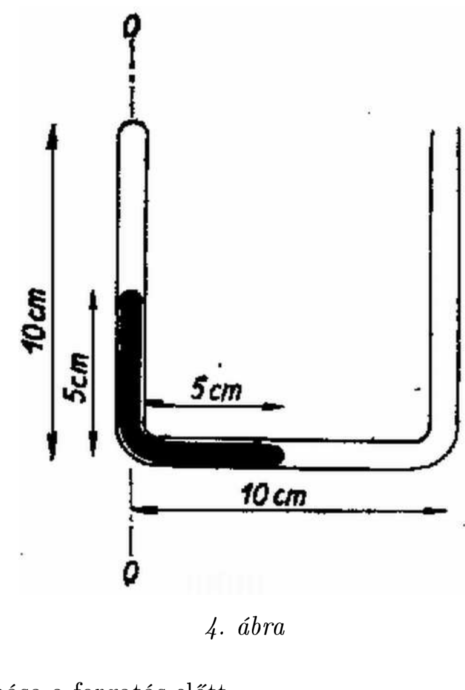
$$F(r_1 - r_2) = \beta\Theta.$$

A kapott egyenletrendszer megoldása:

$$\beta = \frac{m_1 g (r_1 - r_2)}{\Theta + m_1 r_1 (r_1 - r_2)} = 12,5 \text{ s}^{-1},$$
$$F = m_1 g \cdot \frac{\Theta}{\Theta + m_1 r_1 (r_1 - r_2)} = 31,25 \text{ newton},$$
$$m_2 = m_1 \cdot \frac{\Theta}{\Theta + m_1 (r_1^2 - r_2^2)} = 2,5 \text{ kg}.$$

4. *Egy kis keresztmetszetű, U alakú cső bal oldali, zárt szárában és az alsó vízszintes szárban* 5 cm *hosszú a higanyoszlop (4. ábra). Ezután a csövet az* $O - O$ *függőleges tengely körül állandó szögsebességgel forgatjuk. Ekkor azt látjuk, hogy a higany pontosan az alsó csövet tölti ki. Mennyi a szögsebesség? A higany sűrűsége* $13,6 \text{ g/cm}^3$, *a légköri levegő nyomása* 10 newton/cm^2 *(ez megfelel* $73,5$ cm *magas higanyoszlop nyomásának).*

(Vermes Miklós)



4. ábra

Megoldás. A bezárt levegő nyomása a forgatás előtt

$$p_0 = 10 \text{ N/cm}^2 - \frac{5 \text{ cm}}{73,5 \text{ cm}} \cdot 10 \text{ N/cm}^2 = 10 \text{ N/cm}^2 - 0,68 \text{ N/cm}^2 = 9,32 \text{ N/cm}^2.$$

Boyle – Mariotte törvénye szerint forgatáskor a bezárt levegő nyomása ennek a fele:

$$p = 4,66 \text{ newton/cm}^2 = 46\ 600 Pa.$$

Az A keresztmetszetű esőben a higany tömege $A \cdot l \cdot \varrho$, ahol $l = 10$ cm. Ennek ω szögsebességű körpályán tartásához szükséges erő:

$$(1) \qquad F = Al\varrho\omega^2 \cdot l/2$$

($l/2 = 0,05$ méter az átlagos rádiusz). Ezt a higanyoszlop végei közötti nyomáskülönbség biztosítja:

$$F = A \cdot (100\ 000 \text{ Pa} - 46\ 000 \text{ Pa}).$$

Egyenlővé téve (1)-et és (2)-t

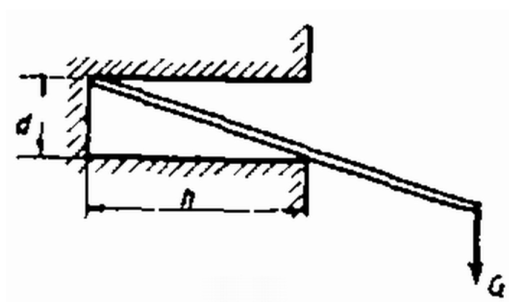
$$A \cdot 0,1 \text{ m} \cdot \varrho\omega^2 \cdot 0,05 \text{ m} = A(100\ 000 \text{ Pa} - 46\ 600 \text{ Pa}).$$

Innen: $\omega = 28,02 \text{ s}^{-1}$.

A II. forduló feladatai

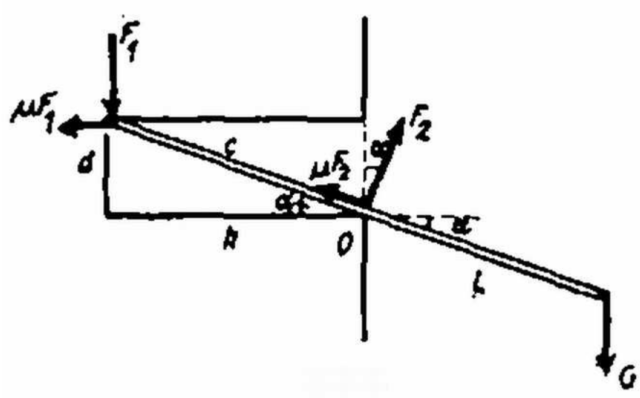
1. *Egy falban* $h = 6$ cm *mély,* $d = 2$ cm *átmérőjű furatot készítünk és ebbe a furatba vékony, merev, elhanyagolható tömegű pálcát dugunk (5. ábra). A súrlódási együttható* $\mu = 0,2$. *Legalább milyen hosszú legyen a pálca, hogy a végére akasztott ruha számára fogasként szolgálhasson?*

(Nagy László)



5. ábra

Megoldás. A furat alakjára az α szög jellemző, tg $\alpha = d/h$ (6. ábra).



6. ábra

Legyen a rúd furatban levő részének hossza c, a falon kívül levő részének hossza L, a kabát súlya G. A megcsúszás kritikus helyzetében mindkét alátámasztási helyen igénybe van véve a maximálisan lehetséges súrlódási erő. Amíg ez a helyzet nem következik be, a feladat statikailag határozatlan.

A fal részéről a rúdra kifejtett erők: F_1, μF_1, $1F_2$, μF_2. Az egyensúly feltétele, hogy a ható erők eredője és a forgatónyomaték nulla legyen. Az erőegyensúly a függőleges és vízszintes komponensekre:

$$G + F_1 - F_2 \cos\alpha - \mu F_2 \sin\alpha = 0,$$
$$F_2 \sin\alpha - \mu F_2 \cos\alpha - \mu F_1 = 0,$$

míg a forgatónyomatékok egyenlősége az O pontra vonatkozóan:

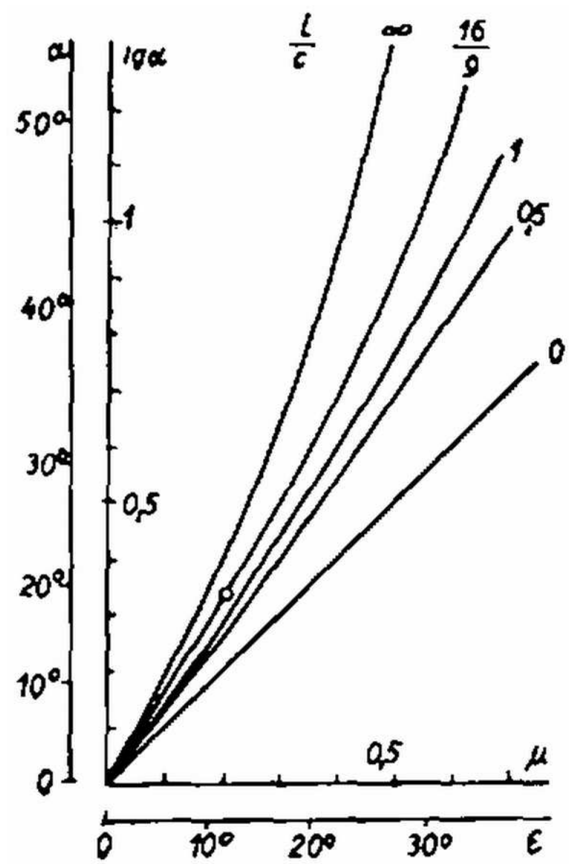
$$GL \cos\alpha = F_1 c \ \cos\alpha + \mu F_1 c \cdot \sin\alpha.$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$F_1 = \frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{2\mu\cos\alpha - (1-\mu^2)\sin\alpha}\cdot G = \frac{5}{3}G = 1,667G,$$

$$F_2 = \frac{\mu}{2\mu\cos\alpha - (1-\mu^2)\sin\alpha}\cdot G = \frac{5}{6}\cdot\sqrt{10}\cdot G = 2,635G,$$

$$L = \frac{(1+\mu \text{ tg } \alpha)\ (\text{tg } \alpha - \mu)}{2\mu - (1-\mu^2)\text{ tg } \alpha}\cdot c = \frac{16}{9}c = 1,778c.$$



7. ábra

A képletünk által adott L az a legközelebbi hely, ameddig a terhet közel lehet hozni a megcsúszás veszélye nélkül. Az L/c arány a lyuk alakjára jellemző α szög és a μ súrlódási együttható függvénye. Érdekes megnézni, hogy különböző L/c arányok esetében tg α, illetőleg α hogyan függ a μ súrlódási együtthatótól, illetve az ε súrlódási határszögtől ($\mu = \text{tg } \varepsilon$). Feladatunkban tg $\alpha = 1/3$ és $\mu = 0,2 = \text{tg } 11,31^\circ$, az ezt jelentő helyet megtaláljuk a 7. ábra $L/c = 16/9$-hez tartozó görbéjén egy ponttal jelölve. Ábránkról leolvasható, hogy $\varepsilon = \alpha$ esetében a terhet akárhová akaszthatjuk, mert ekkor $L/c = 0$. A másik határeset, amikor L/c végtelen, ez akkor következik be, ha

$$2\mu - (1-\mu^2)\text{tg } \alpha = 0$$

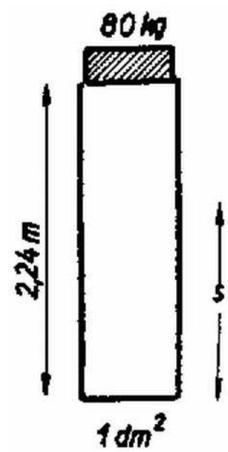
Ekkor nem készíthető ilyen módon fogas. Ennek az egyenletnek a megoldása tg $\alpha = 2\mu/(1-\mu^2)$. Ha arra gondolunk, hogy μ a súrlódási határszög tangense, akkor azt kapjuk, hogy

$$\text{tg } \alpha = \frac{2\text{tg } \varepsilon}{1-\text{tg}^2\ \varepsilon} = \text{tg } 2\varepsilon.$$

Tehát a furat alakjára jellemző a szög nem lehet nagyobb a súrlódási határszög kétszeresénél.

2. *Egy* 1 dm^2 *alapterületű,* 2,24 méter *magasságú hengerben* 4 *gramm hélium van* 0 °C *hőmérsékleten és* 10 newton/cm^2 *nyomáson (8. ábra). A hengerbe beejtünk egy* 80 kg *tömegű dugattyút. Mennyi lesz a dugattyú legnagyobb sebessége? A súrlódást elhanyagolhatjuk. A folyamat olyan gyors, hogy a cső és a dugattyú hőfelvétele elhanyagolható.* $g = 10$ m/s^2. A hélium fajhői $c_v = 3,15 =$ joule/gK, $c_p = 5,25$ joule/gK.

(Dr. Bodó Zalán)



8. ábra

Megoldás. A legnagyobb sebességet akkor éri el a dugattyú, amikor gyorsulása nulla, vagyis a rá ható erők eredője zérus. A 80 kg tömegű dugattyú súlyából 8 newton/cm^2 nyomás származik, ez a külső légnyomással együtt 18 newton/cm^2 nyomást jelent. Tehát a gáz nyomásának a gyorsulásmentes pillanatban szintén 18 newton/cm^2-nek kell lennie.

A gáz összenyomódása adiabatikus folyamat, a fajhők hányadosa $x = 5/3$. Az adiabata törvénye szerint:

$$10 \cdot 22,4^{5/3} = 18 \cdot V^{5/3},$$

innen a keresett térfogat: $V = 22,4 \cdot \left(\frac{10}{18}\right)^{3/5} = 15,74 \text{ dm}^3.$
Ekkor a T hőmérsékletre a gáztörvény alapján:

$$\frac{10 \cdot 22,4}{273 \text{ K}} = \frac{18 \cdot 15,74}{T}, \qquad \text{így} \quad T = 1,8 \cdot 0,7 \cdot 273 \text{ K} = 344 \text{ K} = 71 \text{ °C}.$$

A dugattyúra ható külső erők (a külső légnyomás és a nehézségi erő) nagysága a dugattyú mozgása során állandó, tehát munkavégzésüket egyszerűen megkaphatjuk:

$$W = 1800 \text{ N} \cdot (2,24 - 1,75) \text{ m} = 1199 \text{ joule}.$$

Ez a munka részben melegíti a héliumot, részben pedig mozgási energiává alakul. A gáz belső energiájának a növekedése a hőmérsékletváltozásból számítható ki:

$$c_v m \Delta T = 3,15 \cdot 4.71 \text{ joule} = 895 \text{ joule}.$$

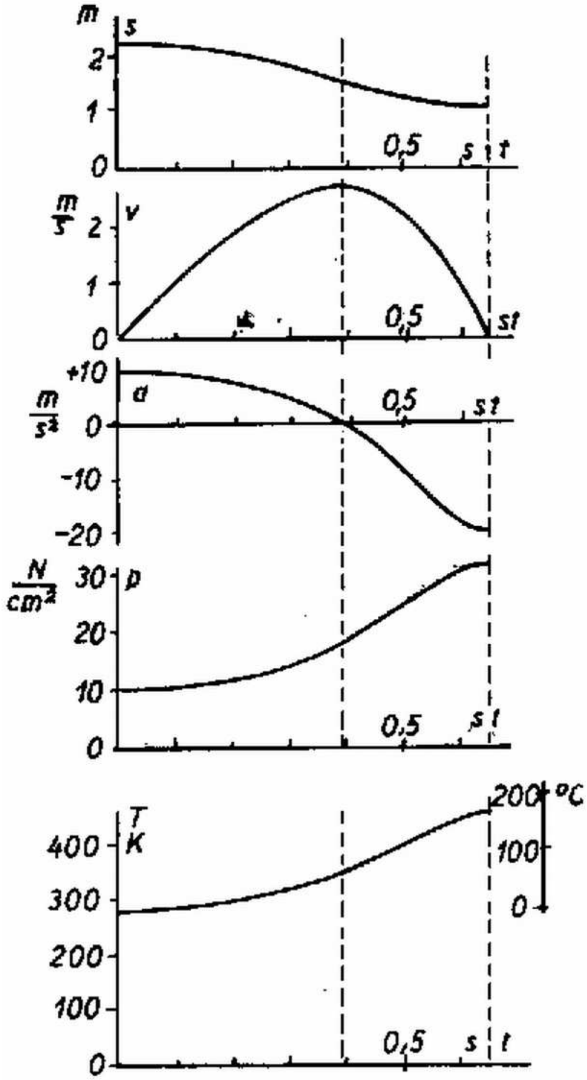
A dugattyú mozgási energiája tehát

$$(1199 - 895) \text{ joule} = 80(v^2/2),$$

innen

$$v = 2,76 \text{ m/s}.$$

A dugattyú sebességének a helytől való függését számítással is követni lehet; így is meghatározhatjuk a sebesség maximumát. A legmélyebb helyzet számítására szolgáló egyenlet magasabb fokú. A helynek, sebességnek, gyorsulásnak, nyomásnak, hőmérsékletnek az időtől való függését csak számítógépes eljárással lehet követni. Ennek a számolásnak az eredményét mutatja a 9. ábra.



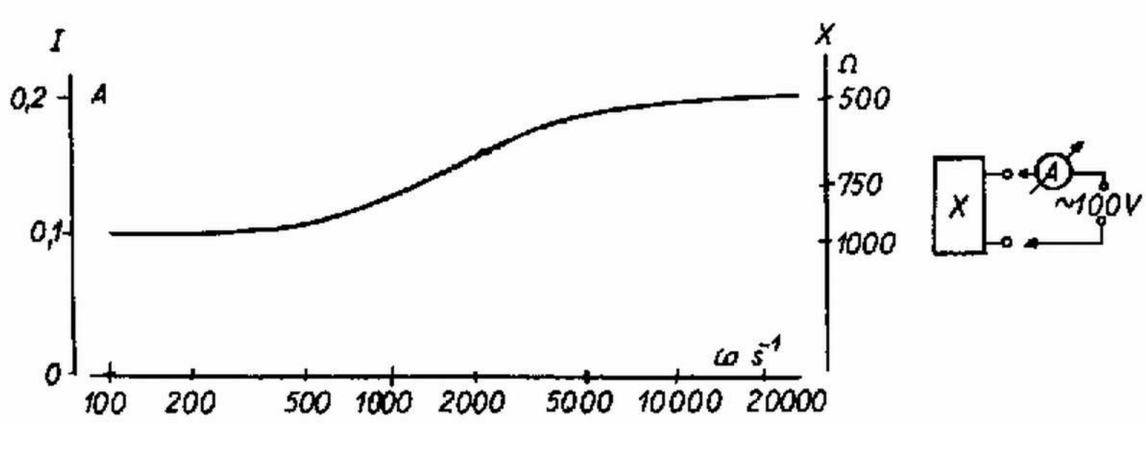
9. ábra

Látható, hogy a sebességmaximum kb. $0,395$ másodperckor következik be. A dugattyú legmélyebb, $1,089$ méteres helyzetét $0,654$ másodperckor éri el, amikor is gyorsulása $-19,08$ m/s^2, a nyomás ekkor $33,22$ newton/cm^2, a hőmérséklet $168,2$ °C. A fékeződés gyorsabban zajlik le, mint a felgyorsulás.

3. *A feladat annak megállapítása, mi van az X jelzésű dobozban. Ezért a kivezetéseire különböző ω körfrekvenciájú váltófeszültséget kapcsolunk és mérjük a bemenő áramerősséget. A dobozra kapcsolt váltófeszültség mindvégig 100 V. A mérések eredményét a 10. ábra és a táblázat mutatja.*

(Nagy László)

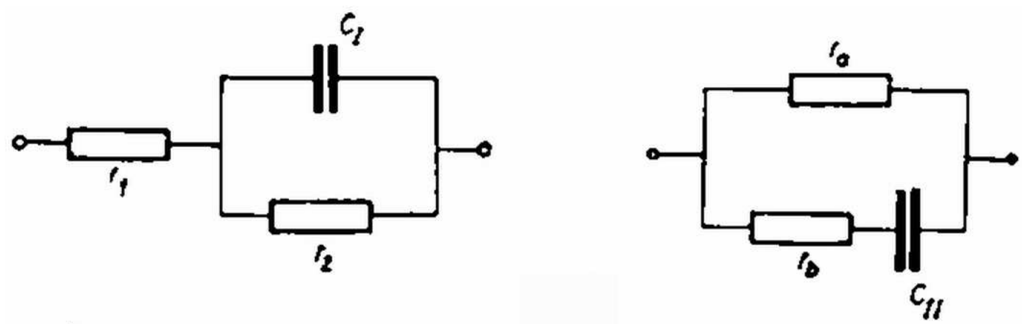
ω (s^{-1})	100	200	500	1000	2000	5000	7500	10 000	20 000
I(A)	0,1004	0,1015	0,1085	0,1265	0,1581	0,1894	0,1950	0,1971	0,1993



10. ábra

Megoldás. Az áramerősség adatait tanulmányozva látjuk, hogy az monoton menetű, nincs rezonanciára utaló szélsőérték, tehát nem lehet a dobozban egyszerre kondenzátor és önindukciós tekercs. Az áramerősségnek a frekvenciával együtt történő monoton növekedése, illetve az impedanciának a monoton csökkenése mutatja, hogy kondenzátor van a dobozban. Látható, hogy $\omega = 0$ esetében az impedancia 1000 ohm, $\omega \to \infty$ esetén a határértéke 500 ohm. Tehát a kondenzátoron átfolyó áramnak át kell folynia egy ellenálláson is, különben az impedancia határértéke $\omega \to 0$ esetén ∞, $\omega \to \infty$ esetén 0 volna.

Két lehetőséget mutatunk meg, melyek között a mérési adatok alapján nem lehet dönteni (11. ábra).



11. ábra

I. Ekkor az $\omega = 0$ esetből $r_1 + r_2 = 1000$ ohm adódik és $\omega \to \infty$ alapján $r_1 = 500$ ohm.
Az egyenletrendszer megoldása: $r_1 = r_2 = 500$ ohm.

II. Ekkor az $\omega = 0$ esetből $r_a = 1000$ ohm, és $\omega \to \infty$ alapján

$$r_a r_b : (r_a + r_b) = 500 \text{ ohm}.$$

A kapacitás meghatározása céljából le kell vezetni az impedancia ω-tól való függését.
I. esetben az eredő ellenállás

$$X = \frac{(r_1 + r_2)^2 + (\omega r_1 r_2 C_I)^2}{1 + (\omega C_1 r_2)^2};$$

ha ide a táblázat alapján számolt $(\omega,\ X)$ értékpárt behelyettesítjük, akkor kapjuk a kondenzátor kapacitására:

$$C_1 = 2\ \mu\text{F}.$$

A II. esetben az eredő ellenállás

$$X = r_a \frac{1 + (\omega C_{11} r_b)^2}{1 + \left[\omega C_{11}(r_a + r_b)\right]^2}.$$

A táblázat alapján számolt valamely $(\omega,\ X)$ értékpárt ide helyettesítve kapjuk a kondenzátor kapacitásának ilyenkor érvényes nagyságát:

$$C_{11} = 0,5\ \mu\text{F}$$

III. kísérleti forduló

A feladat két folyadék elegye sűrűségének tanulmányozása volt a koncentrációtól való függésben. Ezután a felületi feszültségnek a koncentrációtól való függését kellett megvizsgálni.