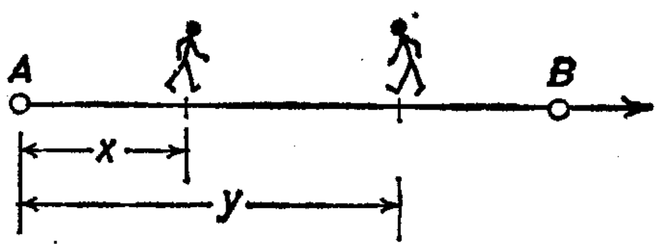
(Megjelent a Kvant c. folyóirat 1980/6. számában)

Egyenletek megoldását keresve, jó tudni, létezik-e egyáltalán a megoldás – egyébként ugyanis csak az időt vesztegetjük. A kérdés akkor válik igazán komollyá, ha meggondoljuk, hogy bonyolult egyenletek és egyenletrendszerek számítógépes megoldása értékes gépidőt emészthet fel. Ezért olyan fontosak az úgynevezett egzisztenciatételek, amelyek a megoldások létezését mondják ki. Ezek egyikét, a Brouwer-féle fixpont-tételt mutatjuk be az alábbiakban.

Séta

Közelünkben ketten sétálnak. Egyikük az A pontból halad B felé, a másik pedig eközben valahol A és B között bandukol. Találkozásuk nyilván elkerülhetetlen: legalább egy ízben egymás mellett lesznek.

Nézzük ezt kissé részletesebben (1. ábra).



1. ábra

Jelölje x az első, y pedig a második sétáló távolságát az A ponttól. Ekkor az x minden értékének (vagyis az első sétáló bármely helyzetének) egyértelműen megfeleltethető egy y érték (a második sétáló helyzete ugyanebben a pillanatban), így az $y = f(x)$ függvényt kapjuk. A találkozás helyét az

$$f(x) = x$$

egyenlet megoldása adja.

Legyen például $AB = 1000$ m, $y = 100 + 0{,}6x$. Ha $x = 0$, akkor $y = 100$; ha $x = 1000$, vagyis az első már célhoz ért, akkor $y = 700$. Megoldva a

$$100 + 0{,}6x = x$$

egyenletet, $x = 250$ m adódik; itt hagyja el az első a másodikat.

Ha a második mozgása kevésbé egyszerű, akkor az f függvény – és így az egyenlet megoldása is – bonyolultabb, mindazonáltal nyilvánvaló, hogy legalább egy találkozás mindig létrejön. Ezzel a „nyilvánvalóval" azonban csínján kell bánni. A továbbiakban egy feltételt fogalmazunk meg, majd bizonyítjuk, hogy e feltétel fennállása esetén a találkozás feltétlenül megtörténik.

Tegyük fel, hogy – a példában tapasztaltaknak megfelelően – az f függvény az $[a; b]$ zárt intervallumot önmagába képezi le, vagyis ha $x \in [a; b]$, akkor $a \le f(x) \le b$. Az $f(x) = x$ egyenlet tetszőleges $[a, b]$-beli megoldását az f függvény ***fixpontjának*** nevezzük. (Példánkban ilyen fixpont a találkozás helye.)

Tétel: Ha az $[a; b]$ zárt intervallumot önmagába leképező f függvény folytonos, akkor létezik fixpontja.

A tételben az f folytonossága és az intervallum zártsága egyaránt lényeges.

1. feladat. Mutassunk példát olyan nem folytonos f függvényre, amely az $[a; b]$ intervallumot önmagába képezi le, de nincs fixpontja.

2. feladat. Mutassunk példát olyan folytonos függvényre, amelyik a) az $[a; b] \cup [c; d]$ halmazt; b) az $(a; b)$ nyílt intervallumot önmagába képezi le, de nincs fixpontja.

A bizonyításhoz vezessük be a $\varphi(x) = f(x) - x$ jelölést, ez a φ függvény folytonos. Világos, hogy $c \in [a; b]$ pontosan akkor fixpontja f-nek, ha gyöke a $\varphi(x) = f(x) - x = 0$ egyenletnek. Így a továbbiakban ennek az egyenletnek keressük megoldását. Vegyük észre, hogy az $a \le x \le b$, $a \le f(x) \le b$ feltételekből $\varphi(a) \ge 0$ és $\varphi(b) \le 0$ következik. Föltehető, hogy mindkét esetben egyenlőtlenség áll, hisz egyébként máris gyököt találtunk. Osszuk most tíz egyenlő részre az $[a; b]$ intervallumot, és színezzük pirosra mindazokat a részintervallumokat, melyek bal oldali végpontjában φ pozitív, és kékre a többit. A legelső intervallum nyilván piros; haladjunk most balról jobbra mindaddig, míg elérjük az első kék intervallumot, illetve ha ilyen nincs, akkor az $[a; b]$ intervallum végét. Legyen az utunk során érintett utolsó piros intervallum $[a_1; b_1]$. Ekkor $\varphi(a_1) > 0$ és $\varphi(b_1) \le 0$, így az eljárást kezdhetjük elölről. Tíz részre osztjuk $[a_1; b_1]$-et, a részeket kiszínezzük a fenti elv szerint, majd megkeressük azt az $[a_2; b_2]$ részintervallumot, melyre $\varphi(a_2) > 0$, de $\varphi(b_2) \le 0$, és így tovább. Így a monoton növő, felülről korlátos

$$a \le a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_k \le \ldots < b.$$

sorozathoz jutunk. Ismeretes, hogy ilyen sorozatnak létezik határértéke, azaz van olyan $c \in [a; b]$, melyre $\lim_{k\to\infty} a_k = c$.

Megmutatjuk, hogy $\varphi(c) = 0$. Tegyük fel, hogy ez nem igaz, és legyen $\varepsilon = \frac{1}{2}\big|\varphi(c)\big| > 0$. Ha most $\varphi(c) < 0$ volna, akkor – mivel $\varphi(a_k) > 0$, azért

$$\big|\varphi(c) - \varphi(a_k)\big| > \varphi(c) > \varepsilon$$

minden k-ra. Másrészt mivel $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = c$ és φ folytonos, így $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi(a_k) = \varphi(c)$, tehát a $\big|\varphi(c) - \varphi(a_k)\big| > \varepsilon$ egyenlőtlenség nem teljesülhet minden k-ra. Hasonló ellentmondásra vezet a $\varphi(c) > 0$ feltevés is a $\big|\varphi(c) - \varphi(b_n)\big| \geq \big|\varphi(c)\big|$ egyenlőtlenség felhasználásával.

A fenti tétel alkalmazásával döntsük el, van-e gyöke a $\cos x^3 - x = 0$ egyenletnek! A $\cos x^3$ függvény folytonos, a $[-\pi/2; \pi/2]$ intervallumot önmagába képezi le (a függvény értékei is ebbe az intervallumba esnek), így a tétel szerint létezik gyöke.

Vegyük észre, hogy az $\{a_k\}$ és a $\{b_k\}$ sorozatok a gyökhöz tartanak, és az $[a;\, b]$ intervallumot tíz helyett akárhány részre is oszthatnánk. Ezt a módszert valóban alkalmazzák egyenletek közelítő megoldásainak kiszámítására.

Tételünk semmit sem mond a megoldások számáról; nyilván több fixpont is lehetséges.

Egy csésze kávé

Előttünk van egy csésze kávé. Egyenletesen kevergetve a csésze közepén a kávé mozdulatlan marad. Ha nem körbe keverjük, a kép kuszább lesz, de két különböző pillanatban megfigyelve a felszínt, mindig találunk olyan részecskét, amely helyben marad abban az értelemben, hogy mindkét pillanatban – de persze nem az egész idő alatt – ugyanazon a helyen van.

Ez fizikai meggondolások alapján nyilvánvaló, hiszen a súrlódás miatt a részecskék a csésze fala mellett nem mozdulnak el. Egyáltalán nem nyilvánvaló – de igaz marad – az állítás, ha csupán a változás folytonos voltát követeljük meg (tehát azt, hogy „közeli" részecskék ne távolodjanak „túlságosan" el egymástól).

A megfigyelt jelenség matematikai leírásához szükségünk van néhány fogalomra.

Legyen M egy ponthalmaz (az egyenesen, síkon vagy a térben); f pedig az M leképzése önmagába: vagyis az M halmaz minden x pontjára $y = f(x) \in M$. Egy ilyen leképezést *folytonosnak* nevezünk, ha minden $x_0 \in M$-hez és minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan (x_0-tól és ε-tól függő) $\delta > 0$, hogy M minden olyan x pontjára, melyre x közelebb van x_0-hoz, mint δ, a képeik, $f(x)$ és $f(x_0)$ távolsága kisebb ε-nál.

Ha M a számegyenes részhalmaza, akkor x_0 és x távolsága $\big|x_0 - x\big|$, a képeiké $\big|f(x_0) - f(x)\big|$, így definíciónk a folytonos függvények ismert definíciójába megy át.

A korábbiaknak megfelelően az $x \in M$ pontot az f függvény fixpontjának hívjuk, ha $f(x) = x$.

Mikor létezik az f leképzésének fixpontja ? A választ Luitzen Egbertus Jan *Brouwer* (1881–1959) holland matematikus fixpont tétele adja meg. Ezt a nevezetes tételét nem is olyan régen, 1911-ben bizonyította. A tétel, nagyszámú általánosításával együtt, jelentős szerepet tölt be a modern matematikában. A fixpont tételek elméleti és gyakorlati szempontból egyaránt fontosak: a szárnyprofilok tervezésekor éppúgy használják őket, mint a különböző játékok optimális stratégiáinak és egyensúlyi helyzeteinek vizsgálatánál, valamint közgazdasági modellek készítésénél.

Brouwer tétele: A zárt körlap önmagára történő folytonos leképzésének létezik fixpontja.

A tétel nemcsak körlapra igaz, hanem minden olyan konvex, korlátos halmazra is, amely a határát tartalmazza: például téglalapra, háromszögre, illetve tetszőleges konvex sokszögre. A térben is teljesül például a kockára vagy a gömbre.

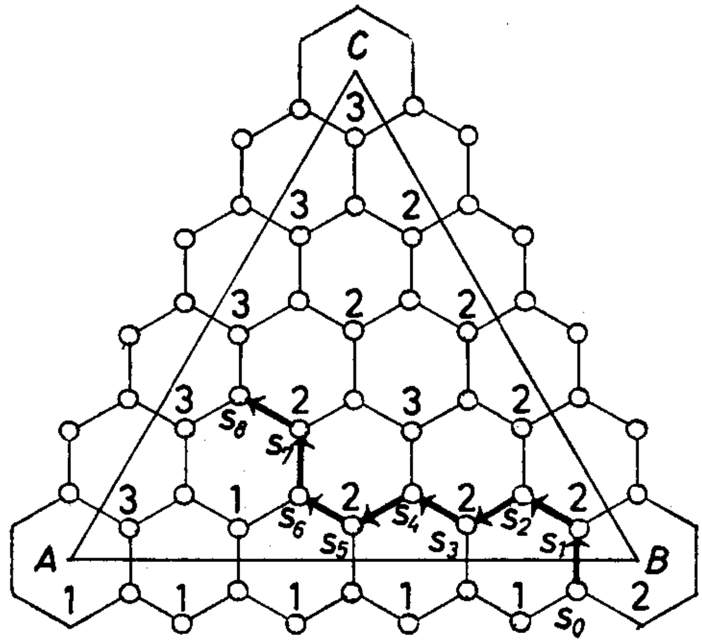
3. feladat. Mutassunk példát olyan síkbeli, korlátos M halmazra, és annak olyan önmagába történő folytonos leképezésére, melynek nincs fixpontja.

4. feladat. Mutassunk példát a nyílt körlemeznek olyan folytonos, önmagába történő leképezésére, melynek nincs fixpontja.

5. feladat. Mutassunk példát a zárt körlemez olyan nem folytonos leképezésére, melynek nincs fixpontja.

Brouwer tételét nem a fenti formában bizonyítjuk; csak azzal az esettel foglalkozunk, ha az M halmaz szabályos háromszög.

Az a oldalú ABC szabályos háromszögre építsük fel a 2. ábrán látható hálózatot.

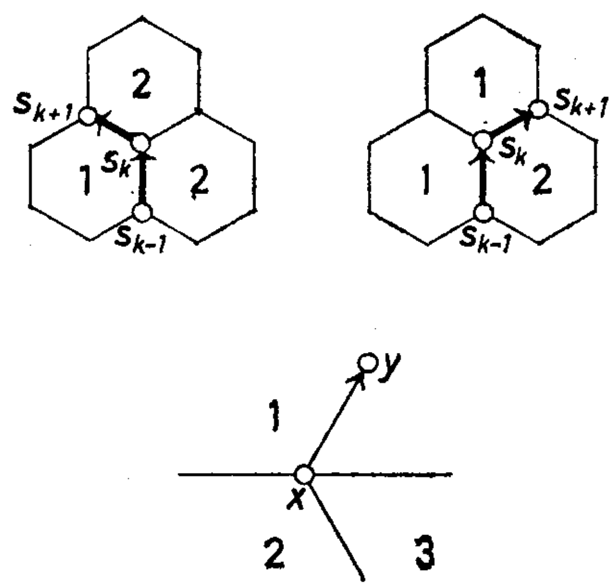


2. ábra

A háromszög belsejében levő, kis körökkel jelölt szögpontok mindegyikéből három él indul ki, ezek az élek a szomszédos szögpontokat kötik össze. A hálózat „sejtjei” b oldalú szabályos hatszögek. A háromszög oldalait k egyenlő részre osztó pontok, valamint a háromszög csúcsai a határolósejtek középpontjai. Nyilván $k \cdot b \cdot \sqrt{3} = a$, a sejtek száma pedig $(k+1)(k+2)/2$. Minden belső szögpont három, a határon levő pedig kettő vagy egy sejthez tartozik.Számozzuk meg a sejteket az 1, 2, 3 számokkal a következő módon: az AB oldalon levő, B-t nem tartalmazó határolósejtek kapják az 1-es számot; a BC oldalon lévő, C-t nem tartalmazók a 2-t, a megmaradt határolósejtek pedig 3-asok. A belső hatszögekbe a számokat tetszőleges módon írhatjuk (2. ábra). Egy szögpontot telített pontnak nevezünk, ha 1-es, 2-es és 3-as sejtnek is csúcsa. A most következő állítás az ún. *Sperner-lemma* speciális esete.*

Segédtétel: Létezik telített szögpont.

Bizonyítás. Felépítünk egy töröttvonalat $1-2$ típusú, tehát 1-es és 2-es számú sejtek közös határán haladó élekből. A határon kezdjük, ahonnan a számozás miatt indul ilyen s_0s_1 él. Azt állítjuk, hogy ilyen éleken haladva véges számú lépés után telített pontba érünk. Ha ugyanis az $1-2$ típusú $s_{k-1}s_k$ él ($k = 1, 2, \ldots$) s_k végpontja nem telített, akkor található olyan s_ks_{k+l} él, melyre $s_{k+l} \neq s_{k-1}$ és amelyik ugyancsak $1-2$ típusú (3. ábra).



3–4. ábra

*Sperner-lemmának a következő állítást szokás nevezni: Ha az AB oldalon levő határsejtek mindegyike 1-es vagy 2-es; a BC oldalon levők mindegyike 2-es vagy 3-as; a CA oldalon levők mindegyike pedig 3-as vagy 1-es, akkor létezik telített szögpont. Az itt szereplő segédtétel bizonyítása, a határsejtek speciális számozása miatt, lényegesen egyszerűbb, mint a Sperner-lemma bizonyítása. – *A szerk.*

Az út nem juthat ki a határra és nem térhet vissza önmagába sem (miért?). A csúcsok száma viszont véges, így a töröttvonal feltétlenül telített pontba torkollik.

A hattyú, a rák és a csuka

Készen állunk Brouwer tételének bizonyítására, amennyiben az M halmaz az ABC szabályos háromszög. Osszuk fel a háromszög oldalait k egyenlő részre, készítsük el a 2. ábrán látható sejthálózatot, és a határolósejteket számozzuk meg az előbbi módon. Ezek után egy belső sejt számát a következőképpen határozzuk meg. Jelöljük a sejt középpontját x-szel. Ha x távolsága AB-től nem nagyobb, mint $f(x)$-é (az x pont nem „süllyed" a leképzés hatására), akkor a sejt az 1 számot kapja. Ha x nem ilyen, ámde x nem közeledik BC-hez (x távolsága BC-től nem nagyobb, mint $f(x)$-é), akkor a sejt a 2 számot kapja. A megmaradó sejtek 3-asok lesznek, ezek középpontjai a leképezés hatására CA-tól eltávolodnak. A 4. ábrán az x középpontú sejt aszerint kapja az 1, 2, 3 számok valamelyikét, hogy az $\overrightarrow{xy}$ vektor melyik tartományba mutat.

Segédtételünk szerint a szögpontok között létezik telített pont, jelöljük ezt (vagy ha több van, az egyiket) x_k-val. Az előálló helyzetet *Krilov* verse szemlélteti:

A Hattyú, a Csuka meg a Rák

Egyszer a Hattyú a Csukával és a Rákkal
Akart elhúzni egy tele kocsit;
Nos hát, befogtak, s indulnának végre,
Majd megfeszül mind: húz, vontat, szorít –
Ám a kocsi, bár könnyű volt, nem mozdul mégse,
Mert a Hattyú felfele tört az égre,
A Rák meg hátra – s vízhez a Csuka.
Ne firtassuk itt, ki volt az oka:
De a kocsi nem indult el soha.

Mándy Stefánia fordítása

A versbeli szekérhez hasonlóan húzzák háromfelé x_k-t a vele összefüggő sejtek. Ez a pont már majdnem fixpont, hiszen elegendően kis sejtméret esetén csak keveset közeledhet AB-hez, BC-hez és CA-hoz is – vagyis alig mozdul el.

Nézzük most a telített szögpontokból álló $\{x_k\}$ sorozatot.

Első eset. Az $\{x_k\}$ sorozat konvergens.* Tartson a sorozat az x ponthoz, ekkor x az adott leképzés fixpontja. (Ez következik az f leképzés folytonosságából, emiatt ugyanis x a háromszög egyik oldalához sem közeledhet.)

6. feladat. Bizonyítsuk be, hogy x valóban fixpont.

Második eset. Az $\{x_k\}$ sorozat nem konvergens. Ebben az esetben megadható a természetes számokból álló $k_1 < k_2 < \ldots < k_n \ldots$ sorozat úgy, hogy $\{x_k\}$-nak az $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_n}, \ldots$ részsorozata már konvergens. Legyen $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = x'$, ekkor x' fixpont.

7. feladat. Bizonyítsuk be a fenti tulajdonságú részsorozat létezését és azt is, hogy x' fixpont.

A fixpont-tételek fejlődése

Brouwer fixpont-tétele, amelyet zárt intervallumra és szabályos háromszögre igazoltunk, nemcsak a három, hanem a magasabb dimenziós terekben is igaz. Mi több, Schauder, lengyel matematikus megmutatta, hogy a tétel igaz „végtelen" dimenziós terekben is. A témakör lényegesen gazdagodott Tyihonov szovjet és Banach lengyel matematikus munkássága nyomán. A legutóbbi időben pedig nagyteljesítményű elektronikus számítógépeket használnak a különböző feladatok megoldásait szolgáltató fixpontok keresésére.

8. feladat. A Brouwer-tétel zárt intervallumokra vonatkozó állításának felhasználásával mutassuk meg, hogy az

$$a)\quad x - \cos x = 0; \qquad b)\quad \cos(\sin x) - x = 0$$

egyenleteknek létezik megoldása.

9. feladat. Az $f{:}(x,y) \to (x',y')$ leképezésnek, ahol $x' = x^2 + 1{,}5xy$, $y' = 0{,}5xy + y^2$, van fixpontja az $S = \big\{(x,y) : x \geq 0; y \geq 0; x + y = 1\big\}$ halmazon. Bizonyítsuk be ezt az állítást Brouwer tételének felhasználásával, és oldjuk meg a megfelelő

$$x = x^2 + 1{,}5xy$$
$$y = 0{,}5xy + y^2$$

egyenletrendszert.

---

*Azt mondjuk, hogy egy pontsorozat konvergens, ha a pontok koordinátáiból alkotott számsorozatok konvergensek.

10. feladat. Igazoljuk, hogy az

$$x = \sin(x+y)$$
$$y = 0{,}5(x^2 + xy^3)$$

egyenletrendszernek létezik megoldása.

11. feladat. Van-e az alábbi egyenletrendszernek az $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ triviálistól különböző megoldása? Ha igen, keressük ezt meg!

$$x_1 = x_2^2 + 2x_2x_3 + x_1x_2$$
$$x_2 = x_3^2 + x_3x_1$$
$$x_3 = x_1^2 + x_1(x_2 + x_3)$$

B. Vertgejm

(Fordította: **Pataki János)**