

Ebben a rovatban havonta tíz-tíz olyan érdekes – könnyebb vagy nehezebb – feladatot fogunk elmondani, amelyek a Matematikai Diákolimpiára előkészítőül szolgálnak. A feladatok megoldását nem kérjük beküldeni, és a megoldásokat sem fogjuk ismertetni.

1. Melyik a nagyobb az alábbi két szám közül:

$$\sqrt[7]{7 + \sqrt[7]{7}} - \sqrt[7]{7}, \quad \sqrt[7]{7} - \sqrt[7]{7 - \sqrt[7]{7}}$$

2. Igazoljuk, hogy ha az $x_1, x_2, \dots, x_n$ pozitív számok szorzata 1, akkor

$$\sum_{i=1}^n x_i^n \leq \sum_{i=1}^n x_i^{n+1}$$

3. Határozzuk meg azokat az m, n természetes számokból álló számpárokat, amelyekre az

$$\frac{1 - \sin^2 nx}{1 - \sin^2 mx} = \sin nx$$

egyenletnek van valós megoldása.

4. Igazoljuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{n} \cdot \cos^2 \frac{k\pi}{n} = 0.$$

5. Oldjuk meg a

$$(2x - 1)^n + (1 - x)^n = x^n$$

egyenletet, ha n adott természetes szám.

6. Határozzuk meg a

$$(2 - \cos^2 \alpha_1)(2 - \cos^2 \alpha_2) \dots (2 - \cos^2 \alpha_n) + (\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \dots \cos \alpha_n)^2$$

kifejezés legnagyobb és legkisebb értékét, ha n adott természetes szám.

7. Igazoljuk, hogy a nemnegatív a, b, c, d számokra

$$(a + c)(b + d)(2a + c + d)(2b + c + d) \geq 4cd(2a + c)(2b + d).$$

8. Jelölje n db pozitív szám mértani közepét M , k -adik hatványközepét H_k (k természetes szám). Igazoljuk, hogy

$$(n - 1)M^n \leq nH_{n-1}^{n-1} \cdot H_1 - H_n^n.$$

9. Igazoljuk, hogy bármely (n, k) természetes számokból álló számpárhoz egyetlen olyan $f(n, k)$ természetes szám van, amely kielégíti az

$$(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})^k = \sqrt{f(n, k) + 1} + \sqrt{f(n, k)}$$

összefüggést.

10. Milyen x, y valós számokra teljesül a következő egyenlőtlenség?

$$\sqrt[3]{\frac{x^3 + y^3}{2}} \geq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}}.$$