

Ebben a rovatban havonta tíz-tíz olyan érdekes – könnyebb vagy nehezebb – feladatot mondunk el, amelyek a Matematikai Diákolimpiára előkészítőül szolgálnak. A feladatok megoldását nem kérjük beküldeni, és a megoldásokat sem fogjuk ismertetni.

1. Tekintsük a kocka csúcsain átmenő gömböt, az éleit érintő gömböt, valamint azt a gömböt, amely átmegy a kocka egyik csúcsán és érinti a szemben fekvő csúcsban találkozó éleket. Fejezzük ki az utóbbi gömb sugarát a másik két gömb sugarával.

2. Igazoljuk, hogy ha egy tetraéder két súlyvonala merőleges a szemközti lapra, akkor a tetraédernek legalább négy éle egyenlő hosszú.

3. Van-e olyan szabályos gúla, amelyben két szomszédos oldallap hajlásszöge egyenlő két szomszédos oldalél hajlásszögével?

4. Lehet-e egy szabályos gúla alaplappjának és oldallappjának a hajlásszöge egyenlő az (egy csúcsból induló) oldalél és alapél hajlásszögével?

5. Valamely háromoldalú szabályos gúla köré írt gömb átmérője 9-szerese a gúla alapjához tartozó magasságnak. Számítsuk ki két oldallap hajlásszögét.

6. Konvex, nem feltétlenül szabályos oktaéder tetszőleges lapjának a súlypontját kössük össze a tér adott P pontjával, majd húzzunk a kapott egyenessel párhuzamos egyenest a szemben fekvő lap súlypontján keresztül. Ilyen módon összesen 16 egyenest kaphatunk. Igazoljuk, hogy a P pontra nem illeszkedő 8 egyenes is átmegy a tér egy pontján.

7. Legyen az $ABCD$ tetraéder DS súlyvonala merőleges az ABC alapra. Jelölje az alaplapp egy belső P pontjának merőleges vetületeit az AD , BD , CD élekre A' , B' , C' . Igazoljuk, hogy az $A'D + B'D + C'D$ összeg állandó.

8. Adott az egységsugarú gömbön az $A_1, A_2, \dots, A_n$ nem feltétlenül különböző n db pont. Igazoljuk, hogy van a gömbfelületnek olyan P pontja, amelyre a

$$PA_1 + PA_2 + \dots + PA_n$$

távolságösszeg legalább n .

9. Az n oldalú, egyenlő és adott oldalélű gúlák közül melyiknek a térfogata a lehető legnagyobb?

10. Bizonyítsuk be, hogy bármely tetraéder köré írt gömb átmérőjének kétszerese legalább akkora, mint a hat él négyzetösszegének a négyzetgyöke.