

Olimpiai előkészítő feladatok

Ebben a rovatban havonta tíz–tíz olyan érdekes – könnyebb vagy nehezebb – feladatot fogunk elmondani, amelyek a Matematikai Diákolimpiára előkészítőül szolgálnak. A feladatok megoldását nem kérjük beküldeni, és a megoldásokat sem fogjuk ismertetni.

1. Igazoljuk, hogy a háromszög oldalai között fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2 < a^4 + b^4 + c^4.$$

2. Az ABC háromszög beírt, illetve a BC oldalához hozzáírt körének a BC oldalra illeszkedő pontját jelölje E , illetve G . A körök középpontjai O , illetve H , a BC oldal felezőpontja F . Igazoljuk, hogy az FH és EA egyenesek párhuzamosak, az AG és OE egyenesek pedig a beírt körön metszik egymást.

3. Tekintsük mindazokat a háromszögeket, melyekben az AC és a BC oldal hossza adott. Válasszuk ki ezek közül azt, amelynek a beírt r sugarú köre a lehető legnagyobb. Igazoljuk, hogy ennek a háromszögnek az oldalegyeneseit érintő körök sugaraira fennáll a következő összefüggés:

$$r = r_a + r_b - r_c;$$

4. Szerkesszük meg az ABC háromszöget, ha adott az AB és AC oldala, és tudjuk, hogy a háromszög Euler-egyenese merőleges a háromszög köré írt kör A pontjához tartozó sugarára.

5. Igazoljuk, hogy az ABC háromszög súlypontjának az AB oldalra vonatkozó tükörképe akkor és csak akkor illeszkedik a háromszög köré írt körére, ha az AB oldal a másik két oldal négyzetes közepe.

6. Az ABC háromszög A , illetve B csúcsán átmenő külső szögfelezőjének a BC , illetve AC egyenesre illeszkedő pontját jelölje A' , illetve B' . Tekintsük az $A'B'$ szakasz egy P pontjának távolságát a háromszög oldalegyeneseitől. Igazoljuk, hogy az AB egyenestől mért távolság egyenlő a másik két távolság összegével.

7. Jelölje a háromszög két oldalát a és b , az általuk bezárt szöget γ , az oldalakhoz tartozó súlyvonalakat s_a , s_b , ezek hajlásszögét ε . Szerkesszük meg a háromszöget, ha adott

- a) s_a , s_b , γ ;
- b) a , b , ε .

8. A háromszög hozzáírt köreinek középpontjait kössük össze a megfelelő oldalak felezőpontjaival. Mutassuk meg, hogy a három egyenes egy ponton megy át.

9. Rögzítsük az ABC háromszög A és B csúcsát, és tekintsük azokat a háromszögeket, melyek magasságpontja a háromszög AB oldalával párhuzamos középvonalán van. Mi a C csúcsponatok mértani helye?

10. Igazoljuk, hogy az alábbi egyenlőtlenség teljesül minden x , y , z valós számra, ahol α , β , γ valamely háromszög szögei:

$$\left(\frac{x+y+z}{2}\right)^2 \geq yz \cdot \sin^2 \alpha + zx \cdot \sin^2 \beta + xy \cdot \sin^2 \gamma.$$