

Az F. 2255 feladathoz fűzött megjegyzésben megemlíttük, hogy *Ruzsa Imre* igazolta, hogy a feladat feltételei mellett annak eldöntésére, hogy ki hová való, legalább $5N/4$ kérdésre szükség van. Később *Fred Galvin* bizonyította, hogy általában $4N/3$ kérdésnél kevesebb sem elegendő, végül a cikk szerzője, *P. Blecher* mutatta meg, hogy a fentebb ismertetett megoldásban a kérdések száma már nem csökkenthető tovább; kevesebb kérdéssel, akárhogy is teszi fel azokat a feladattal megbízott matematikus, nem mindig tud célhoz jutni. Pontosabban, a tudósok megismeréséhez legalább $q = 3k + 1$ kérdés szükséges, ha $N = 2k + 2$, páros szám, és legalább $q = 3k$ kérdés, ha $N = 2k + 1$, páratlan szám.

E két állítás közül elegendő csak az elsőt igazolnunk. Valóban, tegyük fel, hogy $N = 2k + 1$ tudóst legfeljebb $q < 3k$ kérdéssel meg tudunk ismerni. Ha a konferencián $2k + 2$ tudós vesz részt, akkor bármely tudóst elhagyva, a megmaradt $2k + 1$ tudós többsége is piripócsi lesz. Róluk a feltevésünk szerint q kérdéssel megtudhatjuk, ki honnan jött. Ezután a $2k + 1$ tudós közül egy piripócsitól megkérdezzük, hogy a kihagyott $2k + 2$ -edik tudós honnan jött. Így a $2k + 2$ tudós születését legfeljebb $q + 1 < 3k + 1$ kérdéssel tisztázhatjuk. Ez viszont ellentmond annak, hogy $2k + 2$ tudós megismeréséhez legalább $3k + 1$ kérdést kell feltennünk.

Képzeljük most el, hogy az A matematikus azt állítja, hogy ő tud egy olyan eljárást, amely $N = 2k + 2$ tudós esetén $q < 3k + 1$ kérdéssel eldönti, hogy ki hol született. B nem hiszi, hogy ez az eljárás jó, és meg akarja mutatni A -nak, hogy tévedett. Hogyan fogjon hozzá? A -nak az az érdeke, hogy a tudósokat minél hamarabb megismerje, B viszont azt akarja, hogy A -nak ez ne sikerüljön. A azt állítja, hogy mindig el tudja érni a célját, s így el kell fogadnia B következő ajánlatát:

„Állítsuk sorba az $N = 2k + 2$ tudóst. Ha a sorban az i -edik tudóst akarod megkérdezni arról, hogy a j -edik honnan jött, akkor ezt *tőlem* kérdezed meg, és *én* fogok válaszolni az i -edik tudós helyett. Összesen legfeljebb $3k$ kérdést tehetsz fel, és azt állítom, hogy válaszaim alapján legalább egy tudósról nem tudod eldönteni, hogy honnan jött. Vagyis lesz olyan tudós, hogy vele együtt legfeljebb k nekeresdi vesz részt a kongresszuson, és az a tudós akár piripócsi, akár nekeresdi, a piripócsiak által adott válaszok mindig igazak lesznek.”

Miután A elfogadta B -nek ezt, az ajánlatát, lássuk, B hogyan válaszol A kérdéseire. B először is lerajzol N pontot, $P_1, P_2, \dots, P_N$ -et. Azután A első $k - 1$ kérdésére mindig azt feleli, hogy „nekeresdi”, továbbá ha A az i -edik tudást kérdezte a j -edikről, akkor a P_i és a P_j pontokat egy (másik ponton át nem menő) vonallal – éllel – összeköti. Ezzel a $k - 1$ kérdés után egy gráfot kap, melyben $P_1, P_2, \dots, P_N$ a csúcspontok, és melyben összesen $k - 1$ él van. Jelöljük H -val azoknak a csúcspontoknak a halmazát, melyekből nem indul (és melyekbe nem érkezik) él. A többi csúcsot szétosztjuk a $G_1, G_2, \dots, G_s$ részbe úgy, hogy ha $i \neq j$, akkor G_i -beli és G_j -beli csúcs között nem fut él, de egy G_i -n belül bármely csúcsból bármely csúcsba a behúzott élek mentén el lehet jutni. (A $G_1, G_2, \dots, G_s$ gráfokat a nagy gráf *komponenseinek* nevezzük.)

Legyen a G_i részhalmazban c_i csúcs, és e_i él. Mivel G_i -ben bármelyik csúcsból bármelyikbe el kell tudnunk jutni, azért $c_i \leq e_i + 1$; s mivel az egész gráfban összesen $k - 1$ él van, azért

$$(*) \quad c_1 + c_2 + \dots + c_s \leq e_1 + e_2 + \dots + e_s + s = k - 1 + s,$$

így tehát H -ban legalább $N - (k - 1 + s) = 2k + 2 - k + 1 - s = k + 3 - s$ pont van.

Ezek után B eldönti, hogy melyik tudós honnan jött. Azok a tudósok, akiknek megfeleltetett pont H -ba esik, legyenek piripócsiak; továbbá legyen minden G_i -ben egyetlen olyan pont, melynek megfeleltetett tudós piripócsi, s az összes többinek megfeleltetett tudós nekeresdi. Ezzel a nekeresdiek száma $(*)$ alapján

$$(c_1 - 1) + (c_2 - 1) + \dots + (c_s - 1) \leq -1.$$

Mivel a kongresszuson $N = 2k + 2$ tudós vesz részt, azért a nekeresdiekből k is lehet, így később az egyik, most piripócsinak kikiáltott tudóst B még átköltöztetheti Nekeresdre.

A -nak a „második fordulóban” még $2k + 1$ kérdés áll rendelkezésére. B ezekre a kérdésekre az „igazságot” fogja felelni a következő módon. Ha egy tudósra A ebben a fordulóban többször kérdez rá, B mindig ugyanazt válaszolja. Amikor először kérdezi, hogy hova való és a tudósnak megfeleltetett pont H -ba esik, akkor B válasza „piripócsi”. Ha A olyan tudósról kérdez, akinek pontja, mondjuk G_i -be esik, akkor B válasza attól függ, van-e még ezen kívül G_i -ben olyan pont, amelynek megfeleltetett tudósról A még nem érdeklődött a második fordulóban. Ha van, akkor B válasza „nekeresdi”, mert a G_i -hez tartozó egyetlen piripócsi tudóst majd azok közül jelöli ki, akikről A még nem érdeklődött. De ha ilyen már nincs, akkor B válasza „piripócsi”.

A -nak $2k + 1$ kérdés áll rendelkezésére, a kongresszuson viszont $N = 2k + 2$ tudós vesz részt. Így feltétlenül lesz olyan tudós, akiről A a második fordulóban nem kérdezett. S a neki megfeleltetett pont akár H -ban van, akár valamelyik G_i -ben, s a tudós akár Piripócsról, akár Nekeresdről jött, a piripócsiak által adott válaszok mindig megfelelnek a valóságnak. Így A nem tudta eldönteni, hogy ez a tudós honnan jött, s ezzel B meggyőzte A -t – és feltehetően az olvasót is –, hogy $N = 2k + 2$ tudós esetén $3k + 1$ -nél kevesebb kérdéssel nem juthat célhoz.