

Nemzetközi matematikai versenyt rendeztek Luxemburgban. A versenyen Belgium, Hollandia, Nagy-Britannia, Jugoszlávia és Luxemburg vett részt, 8–8 fős csapattal. Az olimpia szokásos rendje szerint a résztvevőknek 2 napon 3–3 feladatot kellett megoldaniuk. A megoldásra fordítható idő 4–4 óra volt.

A verseny befejeztével az 5 tagú nemzetközi zsűri 1 első díjat (37 pont), 7 második díjat (30–34 pont) és 11 harmadik díjat osztott ki. A legjobb eredményt a holland *Karlljan Schontens* érte el.

A verseny feladatai a következők (a feladatok után zárójelben a kitűző ország neve és az elérhető maximális pontszám áll):

1. Keressük meg az összes olyan f , racionális helyeken értelmezett racionális értékeket felvevő függvényt, amely kielégíti a következő feltételeket

$$(i) \quad f(1) = 2$$

$$(ii) \quad f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1,$$

ahol x, y racionális számok.

(Nagy-Britannia, 6)

2. Legyen A, B és C három egy egyenesen levő pont, B az A és C között van. Az AC egyenesnek ugyanazon oldalára rajzoljuk meg az AB, BC és AC átmérőjű félköröket. Az első két félkör B -beli közös érintője messe a harmadik kört E -ben. Legyen U és V az első két félkör másik közös érintőjének érintési pontja. Fejezzük ki az EUV és EAC háromszögek területének arányát az $r_1 = \frac{1}{2}AB$ és $r_2 = \frac{1}{2}BC$ függvényeként.

(Luxemburg, 7)

3. Legyen p egy prím szám és n egy pozitív egész szám. Igazoljuk, hogy a következő két állítás ekvivalens:

(i) $\binom{n}{k}$ binomiális együtthatók egyike sem osztható p -vel, ahol $k = 0, 1, \dots, n$.

(ii) n előállítható a következő alakban: $n = p^s q - 1$, ahol s és q egész, $s \geq 0$, $0 < q < p$.

(Jugoszlávia, 7)

4. Két kör érinti egymást (belülről vagy kívülről) a P pontban. Az a egyenes érinti a körök egyikét az A pontban és metszi a másikat a B és C pontban. Bizonyítsuk be, hogy a PA egyenes a BPC szög egyik szögfelezője.

(Belgium, 6)

5. Tíz játékos játszik, mindegyik ugyanolyan összegű pénzzel. Minden játszmaiban 5 kockával dobznak, Jelölje n a kockán dobott összeget. Minden esetben az a játékos, aki éppen dobott, kifizeti mind a 9 ellenfelének az éppen akkor náluk levő pénz $1/n$ -ed részét. A játékosok egymás után dobznak és fizetnek. A 10. dobásnál a kocka 12-t mutatott és fizetéskor kiderült, hogy minden játékosnak annyi pénze van, mint a játék kezdetekor. Határozzuk meg, ha lehetséges, a kockákon dobott összegeket rendre.

(Hollandia, 7)

6. Határozzuk meg az összes olyan (x, y) egész számpárt, amely kielégíti a következő egyenletet:

$$x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 8(x^2 + xy + y^2 + 1).$$

(Hollandia, 7)