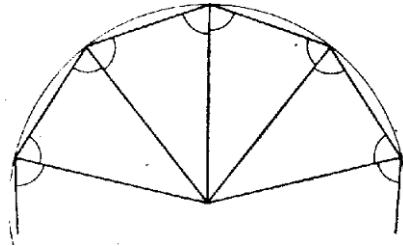


1. feladat. Egy konvex gúla alapja páratlan oldalú sokszög, oldalélei egyenlő hosszúak, és a szomszédos oldallapok közti szögek is egyenlők. Bizonyítandó, hogy az alap szabályos sokszög.

Megoldás. Legyen a gúla alapja az $A_1A_2 \dots A_n$ sokszög (n páratlan egész szám), az alaplappal szemközti csúcs B . Feltétel szerint $A_1, A_2, \dots, A_n$ egyenlő távol van B -től, tehát egy B középpontú gömbön helyezkedik el; továbbá az alaplap síkjában is van, tehát rajta van a két felület metszésvonalán, egy körön. Az alaplap tehát húrsokszög.

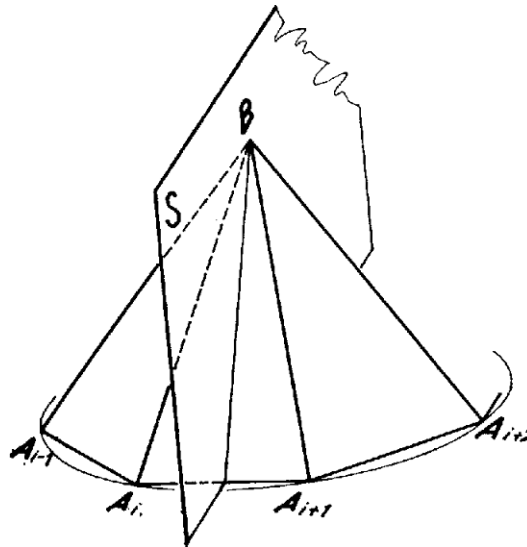
Elég megmutatni, hogy a sokszög oldalai egyenlők. Valóban, ha ez igaz, akkor összekötve minden csúcsot a körülírt kör középpontjával, egybevágó egyenlő szárú háromszögekre bontjuk a sokszöget (1. ábra). Ebből következik, hogy a sokszög szögei is egyenlők (a háromszögek száraival szemközti szög kétszerese mindegyik).



1. ábra

Azt mutatjuk meg, hogy az alaplap második szomszéd oldalai egyenlők. Páratlan oldalú sokszög esetén ebből következik, hogy minden oldal egyenlő, mivel minden oldalról a második szomszédjára térve át páratlan oldalszám esetén bejárjuk az összes oldalt.

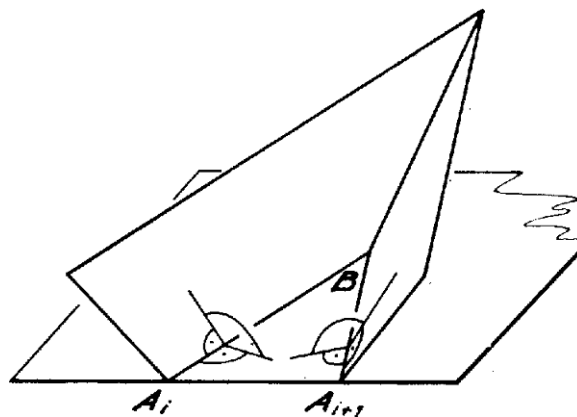
Tekintsük az A_iA_{i+1} élt felező, rá merőleges S síkot. Ez az A_i -től és A_{i+1} -től egyenlő távolságra levő pontok halmaza. Mivel $BA_i = BA_{i+1}$, így S átmegy B -n (2. ábra). Ha tükrözzük S -re, A_i és A_{i+1} helyet cserél, az alaplap síkja pedig önmagába megy át, mivel a sík merőleges S -re. Ugyancsak önmagukba mennek át a B középpontú gömbök is. Ezért önmagába megy át a tükrözéskor az alaplap köré írt kör is.



2. ábra

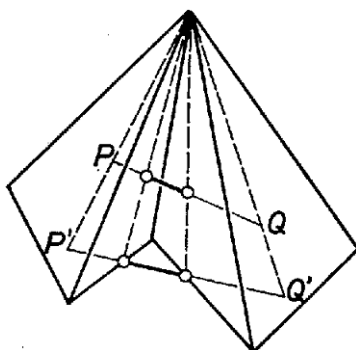
Megmutatjuk, hogy az A_{i-1} csúcs¹ tükörképe A_{i+2} . Jelöljük A_{i-1} tükörképét C -vel. Ez is a körülírt körön van. A tükrözés folytán az $A_{i-1}A_iB$ és $A_iA_{i+1}B$ lapok szöge megegyezik a $CA_{i+1}B$ és $A_{i+1}A_iB$ lapok szögével. A gúla konvex volta miatt A_{i-1} , A_{i+2} és C az $A_iA_{i+1}B$ síknak ugyanazon az oldalán fekszik. De az $A_{i+1}B$ egyenes határolta, azt tartalmazó félsíkhöz a határegyenesre mentén csak egy olyan félsík illeszthető, amelyik vele adott szöget zár be és az $A_iA_{i+1}B$ sík megadott oldalán fekszik (3. ábra). Így C és A_{i+2} egy síkban fekszik, rajta van egy nem ebben a síkban levő körön és különbözik a sík és kör A_{i+1} metszéspontjától, tehát kell, hogy egybeessenek. $A_{i-1}A_i$ és $A_{i+1}A_{i+2}$ tehát egymás tükörképei, és így egyenlők. Ez igaz $i = 1, 2, \dots, n$ -re, vagyis az alaplap mindegyik oldala egyenlő a rá következő másodikkal. Mint láttuk, ebből következik, hogy az alap szabályos sokszög.

¹Ha $i = n$, A_{i+1} -en A_1 értendő, A_{i+2} -n A_2 , $i = 1$ esetén pedig A_{i-1} -en A_n .



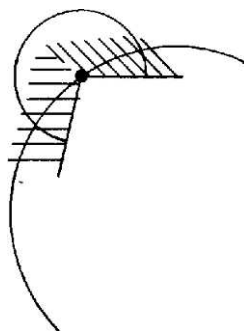
3. ábra

Megjegyzések. 1. Az oldalélek egyenlőségéből már következik a gúla konvex volta, pl. a következők alapján: ha nem volna konvex a gúla, ez azt jelentené, hogy van olyan P és Q belső pontja, amelyeket összekötő szakasznak van pontja a gúlán kívül. Vetítsük a PQ szakaszt az alappal szemközi csúsból az alap síkjára. A $P'Q'$ vetület olyan szakasz volna (4. ábra), amelynek végpontjai az alaplap belsejében vannak, de van az alaplapon kívül levő pontja. Így az alaplap konkáv sokszög volna.



4. ábra

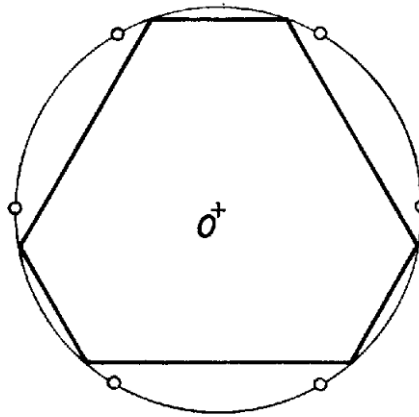
Húrsokszög viszont nem lehet konkáv, hiszen akkor volna a belső szögei közt 180° -nál nagyobb. Annak csúcsa körül elég kis sugarú kört rajzolva ennek a szögtartományba eső (konkáv) körcikke a sokszög belsejében volna (5. ábra). De ennek a körcikkeknek volna a sokszög köré írt körön kívül eső pontja, márpedig egy húrnégyszögnek nincs a körön kívüli pontja.



5. ábra

Egy ilyen jellegű bizonyítással azonban nem kívánta a szervező bizottság megterhelni a versenyzők rendelkezésére álló időt.

2. Többen rámutattak, hogy páros oldalszámú gúlára nem feltétlenül teljesül a feladat állítása. A legegyszerűbb ellenpélda erre egy téglalap alapú „egyenest” gúla. Az alappal szemközi csúcs merőleges vetülete a téglalap középpontja. Általában tekintsük egy O középpontú körbe írt $2n$ oldalú szabályos sokszöget, ($n \geq 2$) és távolítsuk minden második oldalát ugyanannyival a középponttól, majd a szomszédos végpontokat kössük össze (6. ábra). Könnyű látni, hogy az így keletkezett $2n$ -szög szögei is egyenlők. Összekötjük a sokszög csúcsait az O pontban a sokszög síkjára emelt merőleges egy P pontjával. A keletkezett gúla szomszédos lapjai egyenlő szöget zárnak be, amint az az alapélek felezőpontjában állított, az élre merőleges síkra történő tükrözéssel belátható. A gúla alapja azonban nem szabályos sokszög.



6. ábra

2. feladat. Egy minden valós számra értelmezett f függvény minden (x, y) értékre kielégíti a következő egyenlőtlenségeket:

$$\begin{aligned} f(x) &\leq x, \\ f(x + y) &\leq f(x) + f(y). \end{aligned}$$

Bizonyítsuk be, hogy minden valós x -re $f(x) = x$.

I. megoldás. Ha van a feltételeket kielégítő f függvény, arra a feltétel első egyenlőtlenségét $x = 0$ esetén alkalmazva

$$f(0) \leq 0$$

adódik. A második egyenlőtlenségből

$$f(x) = f(x + 0) \leq f(x) + f(0).$$

Innen viszont

$$0 \leq f(0),$$

tehát csak $f(0) = 0$ lehet.

Ismét a második egyenlőtlenség felhasználásával

$$0 = f(0) = f(x - x) \leq f(x) + f(-x).$$

Másképp az első egyenlőtlenség alapján

$$f(x) \leq x \quad \text{és} \quad f(-x) \leq -x,$$

és ezeket összeadva

$$f(x) + f(-x) \leq 0.$$

A kettőből $f(x) + f(-x) = 0$, $f(-x) = -f(x)$.

Végül az első egyenlőtlenségből

$$-f(x) = f(-x) \leq -x,$$

tehát (-1) -gyel szorozva

$$f(x) \geq x.$$

Ez az első feltételi egyenlőtlenséggel együtt azt adja, hogy a feltételeket kielégítő függvény csak az lehet, amelyik minden x értékhez önmagát rendeli.

Erre a függvényre a feladat egyenlőtlenségei valóban teljesülnek, mindegyik esetben egyenlőség áll fenn.

II. megoldás. Kétszer alkalmazva a második, majd kétszer az első feltételi egyenlőtlenséget, a következő összefüggéssorozatot kapjuk egy, a feltételeket kielégítő f függvényre (ha van ilyen):

$$\begin{aligned} 0 &= f(x) - f(x) = f(2x - x) - f(x) \leq f(2x) + f(-x) - f(x) \leq \\ &\leq f(x) + f(x) + f(-x) - f(x) = f(x) + f(-x) \leq f(x) - x \leq x - x = 0. \end{aligned}$$

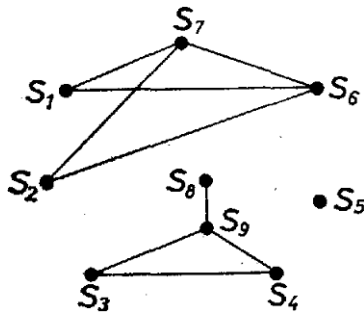
Ez csak úgy állhat fenn, ha minden közbülső kifejezés értéke is 0, így többek közt

$$f(x) - x = 0, \quad f(x) = x.$$

Az így értelmezett függvény valóban kielégíti a követelményeket.

3. feladat. Egy $(n \times n)$ -es táblázat minden mezőjében egy betű áll. A táblázat bármely két sora különböző. Bizonyítsuk be, hogy a táblázatnak van olyan oszlopa, amelyiket elhagyva a megmaradó táblázatnak nincs két egyező sora.

I. megoldás. Indirekt úton bizonyítjuk az állítást. Ha a feladat állítása nem volna igaz, akkor minden oszlophoz tartoznék legalább két olyan sor, amelyik csak a kérdéses oszlopbeli betűben különbözik. Minden oszlophoz válasszunk ki egy ilyen sorpárt. Ezt a kiválasztást szemléltethetjük úgy, hogy az i -edik sort egy S_i ponttal ábrázoljuk, és ha az i -edik és j -edik sor egy kiválasztott sorpár, akkor az S_i és S_j pontot összekötjük egy vonallal (7. ábra). Ezeket a vonalakat élnek fogjuk nevezni, az egész ábrát pedig gráfnak. Gráfunak n pontja van és ugyanannyi éle. Egy ilyen gráfban mindig van kör, vagyis olyan, különböző pontokból álló $S_{i_1}, S_{i_2}, \dots, S_{i_k}$ sorozat, amelyben S_{i_j} -t $S_{i_{j+1}}$ -gyel ($i = 1, \dots, k-1$) és S_{i_k} -t S_{i_1} -gyel él köti össze. Ha ugyanis egy n -pontú gráfban nincs kör, akkor annak legfeljebb $n-1$ pontja lehet. Ezt a megoldás a végén bizonyítjuk.

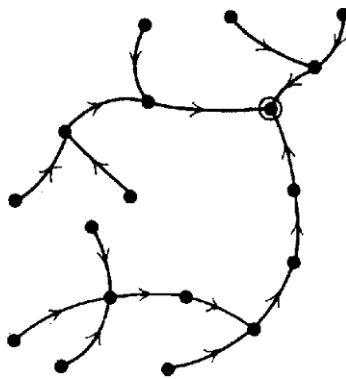


7. ábra

A fenti kör a táblázatra vonatkozóan azt jelenti, hogy az i_1 -edik és i_2 -edik sor csak egy betűben, mondjuk a j -edik oszlopbeliben különbözik, az előbbiben itt egy a_1 , az utóbbiban egy ettől különböző a_2 betű áll. Az i_2 -edik és i_3 -adik sor is csak egy betűben különbözik, és ezek egy másik oszlopban állnak, tehát az i_3 -adik sor j -edik betűje szintén a_2 . Hasonlóan az i_4 -edik, $\dots$, i_k -adik sor j -edik betűje is a_2 , de az i_k -adik és i_1 -edik sor is csak egy betűben tér el, és ezek is egy, a j -edikől különböző oszlopban állnak, így az i_1 -edik sor j -edik betűje is a_2 kellene, hogy legyen, holott ott az a_2 -tól különböző a_1 betű áll. Abból a feltevésből tehát, hogy bármelyik oszlop elhagyásával keletkezik két egyező sor, ellentmondásra jutottunk. Így kell olyan oszlopnak lennie, amelyet elhagyva továbbra is minden sor különböző lesz.

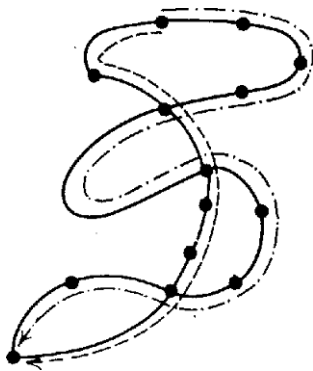
A felhasznált segédétel bizonyítása:

Egy n -pontú gráf egy vagy több összefüggő részből áll, vagyis olyanból, amelyeknek bármelyik pontjából el lehet jutni az összes többibe² (7. ábra). Ha egy összefüggő gráfnak k pontja van és nincs benne kör, akkor $(k-1)$ éle van. Gondoljuk a gráfot egy gátrendszer térképének. Minden pontban őrház van egy gátörrel. Az egyik őrházban van a főőr, aki a többi irányítja (8. ábra). Nyilván minden őr el tud jutni a főőrhöz gátak mentén és csak egyféleképpen, hiszen ha volna két különböző útja is, akkor volna kör is (9. ábra). A főőr kiadja az utasítást (pl. telefonon), hogy mindenki vizsgálja meg a tőle a főőr felé vezető irányban a következő őrházig terjedő gátrészt és jelentse neki, mit tapasztalt. Ő az őrhelyén várja a jelentéseket.



8. ábra

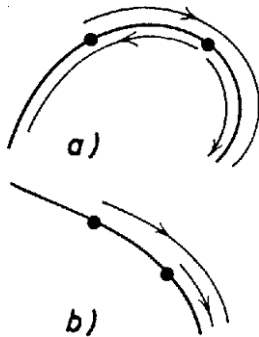
²Egy-egy ilyen rész állhat egyetlen pontból is.



9. ábra

Ekkor egy szakaszt sem vizsgálnak ketten, mert ha ketten vizsgálnák, akkor az egyikük a megszokott útja helyett úgy is eljuthatna a főörhöz, hogy a kérdéses szakaszra nem lép, hanem az azon feléjövő társát bevárva annak az útját követné (10/a ábra). Minden gátszakaszt megnéz valaki, mert ha az egyik végén lakó ör a szakasz érintése nélkül jut el a főörhöz (vagy ő maga a főör), akkor a másik végén lakó ör útja csak az lehet, hogy végigmegy a kérdéses szakaszon és utána a szomszédos ör útját követi (10/b ábra). Eszerint $(k - 1)$ ör minden szakaszt megvizsgál és mindegyiket csak egy gátör, tehát $(k - 1)$ gátszakasz van, vagyis a gráfban $(k - 1)$ él. Ezzel bebizonyítottuk az állítást.

Ha egy n szögpontú, kört nem tartalmazó gráf több összefüggő részre bomlik, akkor mindegyik részben eggyel kevesebb él van, mint pont, így a gráfnak $(n - 1)$ -nél kevesebb éle van.



10. ábra

II. megoldás. A következő, a feladatbelinél valamivel általánosabb állítást bizonyítjuk be teljes indukcióval. Ha egy táblázatnak legalább annyi oszlopa van, mint sora, és a táblázat minden mezejére egy betűt írunk úgy, hogy bármely két sor különbözzék, akkor van olyan oszlop, amelyiknek az elhagyása után is különböző sorok különböző módon lesznek kitöltve.

Két sor esetén van legalább két oszlop és van köztük olyan, amelyikben a két sorban különböző betűk állnak. Bármelyik további oszlopot (ha több van, akár mindet együtt is) elhagyhatjuk. Tegyük most fel, hogy n -nél kevesebb soros (és legalább ugyanannyi oszlopos) táblázatra igaz az állítás, és vegyünk egy n soros táblázatot, amelyik kielégíti az állítás feltételeit. Hagyjuk el az első oszlopot. Ha a sorok ezután is páronként különbözők, akkor az állítás igaz. Ha bizonyos sorok így egyenlővé váltak, akkor az egyenlővé vált sorok közül csak egyet-egyet tartunk meg. Így eggyel fogyott az oszlopok száma és legalább egy sort is elhagytunk, tehát továbbra is legalább annyi oszlop van, mint sor, továbbá bármely két sor különböző. Erre a táblázatra feltevés szerint igaz az állítás: elhagyható egy oszlop úgy, hogy a sorok mind különbözők maradjanak.

Hagyjuk el a megfelelő oszlopot az eredeti táblázatból és nézzünk két sort. Ha mindkettő szerepelt a megritkított táblázatban is, akkor különbözők már akkor is, ha még az első betűket is figyelmen kívül hagyjuk. Ha viszont egy olyan csoportban vannak, amiből csak egy sor került a megritkított táblázatba, akkor az első betűk különbözők. Ekkor is találtunk tehát olyan oszlopot, amelyiknek az elhagyása után bármely két sor különböző maradt. A tulajdonság tehát öröklődik az n -soros táblázatokra is.

Megjegyzések. 1. Többen rámutattak, hogy ha csak eggyel is kevesebb oszlop van, mint amennyi sor, akkor már nem bizonyos, hogy van elhagyható oszlop, ami az ábra alapján könnyen belátható.

a	a	a	a	a
b	a	a	a	a
b	b	a	a	a
b	b	b	a	a
b	b	b	b	a
b	b	b	b	b

2. Sokan az ábécé betűinek a számából próbáltak következtetni. Ez zsákutca volt, hiszen már két jellel is ki lehet tölteni a táblázatot a feltételeknek megfelelően. Egy ilyen kitöltést kapunk, ha az előző megjegyzés táblázatát egy csupa a -ból álló oszloppal egészítjük ki.

Surányi János