

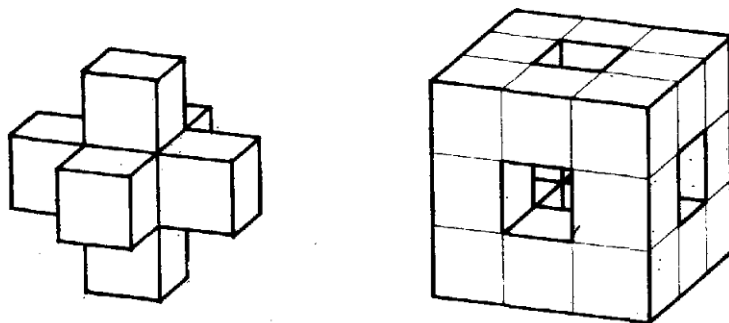
Olvasóink közül bizonyára sokan ismerik a „bűvös kocka” „nevű” „játékot”, melyet Rubik Ernő budapesti építész-mérnök tervezett, hiszen ezt a térszemléletet és kombinatív készséget fejlesztő eszközt 1977 ősze óta árusítják. A „játék” szót azért tettem idézőjelbe, mert az alaposan összekevert bűvös kocka teljes visszarendezése – valamennyi lapjának egy-egy színre hozása – minden előzetes információ nélkül még képzett matematikustól is egy vagy több hétig tartó fejtörést igényel. De azért a világhét se féljen a kockától emiatt senki! Hiszen néhány hetes gondolkodás egy olyan eljárás kidolgozását is eredményezheti, amelyet alkalmazva akár egy általános iskolai tanuló is, óvatos becsléssel, fél óra alatt helyretekéri a kockát.¹

Kidolgozhatók „automatizált” rendezési eljárások is, melyek alapján egy elektronikus számítógép – a maga módján – a kocka állásának tudomásulvétele után lejegyzí, hogy milyen forgások útján érhető el a kocka visszarendezése. Elég nehéz a dolog számítógépesítése, ugyanis az alkalmazandó forgatássorozatot általában egy olyan elemzés választja ki, melynek programnyelven történő leírása igen hosszadalmas. Ezért – noha már ismerek garantáltan legfeljebb 88 forgatást igénylő „kézi” eljárást is – úgy gondolom, hogy az általam készített gépi program, mely legfeljebb 165 forgatással végzi el a rendezést, érdeklődésre tarthat számot. E program egyik fő alkotórészét egy 264 sorból álló döntési táblázat képezi. Ugyanennek a táblázatnak a „kézi” használatával egy kezdő „kockázónak” is „gyerekjáték” az összevissza forgatott lapok rövid időn belüli visszarendezése.

Ezzel azonban természetesen nem zárul le minden kérdés a kockával kapcsolatban, hiszen esetünkben is az első (és minden további) siker állandóan újabb és újabb problémákra vezet.

A bűvös kocka felépítése

Játékszerünknel az első (és meggyőződésem szerint a legnehezebb) probléma annak a szerkezetnek a létrehozása volt; amely lehetővé teszi a forgatásokat. Első látásra nem hittem a szememnek, annyira elképzelhetetlennek tűnt, hogy a kocka bármelyik „lapja” – azaz 3×3 kis kockából álló rétege – a maga egységében elfordítható a további két réteghez képest, annak ellenére, hogy a réteg kockái még egy, sőt két ilyen rétegbe is beletartoznak; miközben akár azokon is kezdhetnénk a forgatást, pedig azok a rétegek az elsőre is, meg egymásra is merőlegesen állnak.



1. ábra

Nevezzük térbeli keresztnek azt az együttest, amely a középső kis kockából és a hat oldallap közepén álló kis kockákból áll. A középső kocka láthatatlan – az tulajdonképpen inkább csak „gondolt kocka”, a többi hatnak is mindig ugyanazt az egy lapját látjuk, csak ez az egy lap van színezve rajtuk. Az élek közepén álló kis kockáknak 2 lapjuk, a csúcsokban állóknak pedig 3 lapjuk van színezve. Ennek a $12 + 8 = 20$ kockának az együttesét térbeli keretnek nevezzük (1. ábra).

A bűvös kocka hat lapjának kilenc-kilenc kis négyzetét a gyártás során, feltehetően annak utolsó lépésében, egy-egy színre festik (ill. jelenleg tapétázzák). A legtöbbször használt színek: pirosak (tűzpiros és bordó), fehér, zöld, kék, sárgák, de láttunk már ezüstszürke lapokat is. A színek megválasztása és kölcsönös helyzete gyártási sorozatonként kisebb különbségeket mutat. Ez persze a feladatot magát nem érinti, de kis gondot okoz; amikor két nem egyformán színezett kocka tulajdonosai kicserélik tapasztalataikat, összehasonlítják rendezési módszerüket.

Aki nem tud ellenállni a kíváncsiságának, hogy szemügyre vegye, vajon milyen az eszköz belseje, az egy szélső réteget 45° -kal elfordítva, elsőként egy élközépkockát feszítsen ki, kellő óvatossággal. A visszarakás során pedig ugyanilyen állásban élközépkockát tegyünk be utolsónak.²

A sarkok rendezése

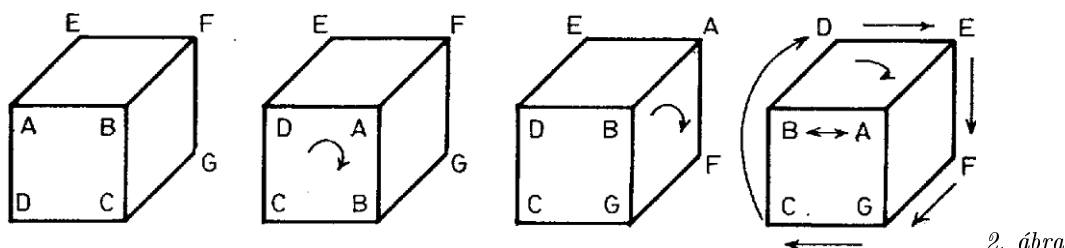
Válasszuk ki a kocka valamelyik csúcsát, és forgassuk el a rajta átmenő lapokat egymás után az óra járásával megegyező irányban 90° -kal. Az egyszerűség kedvéért csak a sarokkockák mozgását figyeljük. Ha a csúcsokat a 2. ábra

¹ Az Ifjúsági Matematikai Kör klubdelutánján, 1980. január 4-én rendezett „kockatekerő versenyen” nyolc benevezett résztvevő közül Tóth Viktornak mindössze 55 (!) másodpercig tartott egy elég jól összekevert bűvös kocka visszarendezése. Ilyen bámulatos teljesítményhez úgy vélem, hogy nemcsak megfelelő stratégiára, de sok gyakorlásra is szükség van. Egyébként meggyőződésem, hogy a bűvös kocka a kézügyességet is fejleszti.

² Az eszköz szétszedése tulajdonképpen sportszerűtlenség, ha csak a játék célját nézzük. Viszont, a játék hevében, vagy türelmetlen, kapkodó játékos kezében, vásárláskor, versenyen előfordulhat, hogy egy-két kockadarab kiugrik. Tehát „elsősegély” céljából szükség lehet az újra összerakás ismeretére. Azonban az újra összerakás mikéntje nem közömbös a rendezhetőség szempontjából! Ha nem vigyázunk, akkor nem biztos, hogy a szétesett kocka az összerakás után forgatások sorozatával rendezhető. (E kérdésre később majd még visszatérünk.)

szerint jelöljük, a három forgatás együttes hatása így írható le: az A és B csúcsok helyet cseréltek, és a C, D, E, F, G ciklus tagjai körben egymás helyére léptek. Ha tehát ezt a három forgatást (változatlan sorrendben) még négyszer megismétljük, a C, D, E, F, G ciklus tagjai visszakérülnek a saját helyükre, de az A, B csúcsok ismét megcserélt helyzetben lesznek.

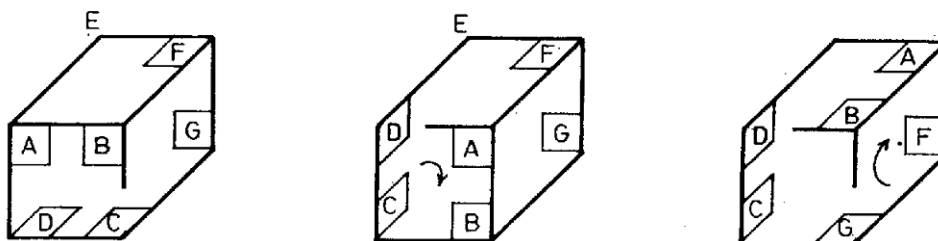
Eljárásunkkal úgy tudjuk két szomszédos sarokkocka helyét felcserélni, hogy közben a többi sarokkocka a helyén marad. Mivel a kocka bármely csúcsából bármely csúcsba eljuthatunk szomszédos csúcsokon lépegetve, eljárásunk ismételt alkalmazásával bármely két sarokkocka felcserélhető. Ez viszont azt jelenti, hogy ez az eljárás önmagában elegendő a csúcsok helyrerakásához. Az persze nem várható, hogy ezzel egyidejűleg a megfelelő helyzetbe is kerüljenek a sarokkockák.



2. ábra

Ha valamelyik sarokkocka a saját helyén áll, de színeinek a körüljárása ellentétes a hozzá tartozó lapokon levő színek körüljárásával, akkor a kocka nem rakható össze úgy, hogy a lapok egyszínűek legyenek. Ilyen esettel tehát nem találkozhatunk. A csúcsok helyretekérése után tehát már csak arra lehet szükség, hogy a sarokkockákat saját helyükön elforgassuk. Sajnos, mint ezt később megmutatjuk, egyetlen sarokkocka önmagában nem forgatható. Keressünk hát olyan eljárást, amelyik két csúcsot forgat egyszerre.

Nézzük meg; mi lett volna az eredmény, ha csak két szomszédos lapot forgattunk volna el egymás után az órajárás irányában 90° -kal, de most már a sarokkockák helyzetét is kövessük figyelemmel. A 3. ábra mutatja az $ABCD, BCGF$ lapok forgatásának a hatását. B visszakérül a helyére, az A, F, G, C, D csúcsok egymás helyére lépnek. Az új helyzet érzékeltetéséül megjelöltük az egymás helyére lépő lapokat. Ezt is figyelembe véve már sem B helyrekerülése, sem az A, F, G, C, D ciklus záródása nem mondható teljesnek. Éppen ez a szerencsénk! Ha ezt az eljárást is megismétljük négyszer, végül is minden sarokkocka a helyén lesz, de a mozgásban részt vevő mind a 6 kocka az óra járásával ellentétes irányban lesz elforgatva 120° -kal a nagy kocka rajta átmenő testátlója körül. Ha ezután az egész eljárást most úgy ismételjük meg, hogy benne az $ABCD$ lap szerepét az $ABFE$ lap veszi át, és most az óra járásával ellentétes irányban forgatunk, akkor végül az A, B, C, F, G kockák visszafordulnak eredeti helyzetükbe, és E az óra járásával egyező irányban fordul el 120° -kal.



3. ábra

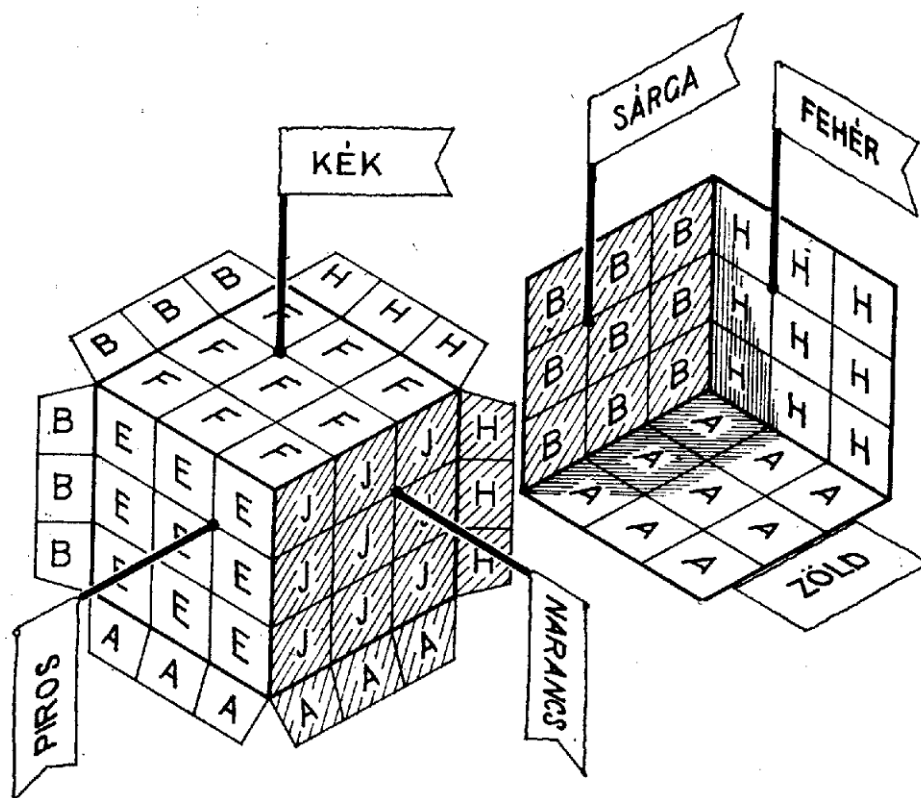
Egyidejűleg el tudjuk tehát forgatni egy lap két átellenes sarokkockáját. Ezzel viszont – mint az könnyen látható – egy híján mindegyik sarokkocka eredeti helyzetébe forgatható. Ha az utolsónak maradt csúcs rendezetlen marad, akkor a kockát rosszul rakták össze, szétszedés nélkül nem lehet egyszínűvé rendezni a lapjait. Különböző kézen vagyunk, már legalábbis ami a csúcsokat illeti. A többi kocka helyrerakásánál azonban már ügyelni kell, nehogy elrontsuk a csúcsok rendezettségét. Ez már nehezebb feladat lesz, nagyobb előkészítést igényel.

Forgatások sorozata

Tisztázzunk néhány apróságot. Természetesen csak úgy végezhetünk kockánkon második, harmadik, ... forgatást, ha a közvetlen előző forgatást befejeztük, vagyis a réteg vagy 90° -ot fordult el valamelyik irányban vagy 180° -ot. Ezért a csúcskockák minden forgatás után ismét az egész kocka valamelyik csúcsán állnak és az élközépkockák is mindig valamelyik él közepén.

Ha egy bűvös kocka részei már simán és könnyen mozognak egymáshoz képest – vagyis az eszköz már jól „be van járva” –, akkor az is elképzelhető, hogy két szemben fekvő réteget befogjuk (például egy finom satuba), és a köztük levő réteget fordítjuk el. Felesleges azonban ezzel bonyolítani a dolgunkat, hiszen egy ilyen elfordítás eredménye ugyanaz, mintha a középső réteget rögzítettük volna, majd a két szélsőt külön-külön az ellentétes irányba fordítanánk el ugyanannyival. A kétféle végállás az egész kocka megfelelő elfordításával egymásba megy át. Általában, a rendezés feladata nem változik meg attól, hogy a kockát mint egészet ide-oda tesszük.

A forgatások közben két markunkba fogva mintegy elcsavarjuk a kocka két (merevnek tekintett) részét egymáshoz képest. Ezalatt mind a két kezünk fordul, de igazában csak a kisebbik résznek – egy rétegnek – az elfordulására gondolunk. Aztán máshogy fogjuk az eszközt a két markunkba, ha a következő forgatás más tengely körül történik. Gyakorlott játékosok szükség szerint váltogatják, hogy melyik markukba szorítanak két réteget, így gyorsabban peregnék a forgatások. Látható ezekből, hogy leírni tulajdonképpen azt kellene, melyik színű lapközeget (féltengelyt) fordítjuk el az éppen körülötte álló nyolc kis kockával együtt, és melyik irányba, mennyivel.



4. ábra

Az elinduláshoz mégis célszerűbb, ha egyelőre a térbeli kereszt tengelyirányait rögzítetteknek gondoljuk (mint egy boksztolási gyakorló labdát, ellenfelet), és ezután a lapokat, féltengelyeiket a helyzetüket jellemző szó kezdőbetűjével jelöljük: E – előlso, H – hátulsó, B – bal oldali, J – jobb oldali, F – felső, A – alsó lap, illetve a közepén átfutó féltengely. Pillanatnyi előnye ennek az, hogy megszabadulunk a gyártási különbözőségektől, a színektől és kölcsönös elrendezésüktől. Ki-ki megválaszthatja, hogy a saját kockáját hogyan tekinti alapállásban levőnek – elég ehhez megválasztani, mi legyen pl. a fedőlap és az előlap színe –, és attól kezdve az előbbi betűk a megfelelő színeket jelentik. Például az én kockámon E – piros, H – fehér, B – sárga, J – narancs, F – kék, A – zöld. (Mindjárt megjegyezzük azonban, hogy ilyen rögzítést általában csak rövidebb, legfeljebb tíz-húsz forgatásból álló egymásutánra, sorozatra érdemes elgondolni.)

Tovább menve, a térbeli keret kis kockáit a rajtuk látható két, illetve három szín (pontosabban az előbbi megokolás szerint két, illetve három helyzet) kezdőbetűjével jelöljük. Például EF (vagy FE) az a kis kocka, amelyik rendezett állapotban az előlap felső élének a közepén áll, FBH (vagy BHF , vagy HFB) pedig a felső lap bal hátsó kis csúscsokkáját jelöli. (Nálam EF egyik lapja piros, a másik kék, FBH lapjai pedig kék, sárga, fehér színűek.) Egy forgatást a hozzá felhasznált féltengely betűjével és utána az 1, 2 vagy 3 számmal írunk le; a szám azt jelenti, hány derékszöggel forgatunk el az órajárás irányában. A 3 forgatás végrehajtása persze egyszerűbb az órajárással ellentétes irányban 1 derékszögnyi forgatással. Használatosak az $F1$, $F2$, $F3$ jelek helyett az F , F^2 , F^3 vagy F , F^2 , F^{-1} esetleg F^+ , $F^\uparrow$, F^- jelek, ahol az utóbbi esetben $\uparrow$ el is hagyható. A mi választásunkat elsősorban a nyomdatechnika indokolja. Az órajárást mindig az illető lapra (vagyis kívülről) odagondolt óraszámra értjük.

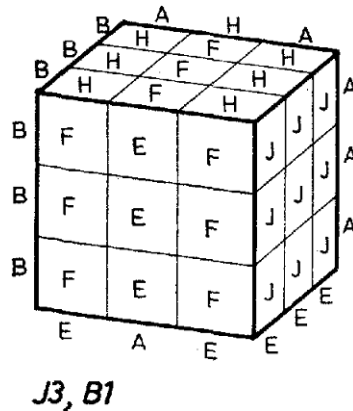
Egyértelműbbé tehetjük a csúscsokkák jelölését, ha a három színt az illető csúcsra odagondolt óraszámra az órajárás irányában soroljuk fel. Ezt tettük, amikor az FBH csúscsokka jelölésére nem 6, hanem csak 3 különböző lehetőséget soroltunk fel.

Néha ugyanazt a jelölést, amelyet magukra a kis kockákra alkalmazunk, használni fogjuk azok külső lapjainak a jelölésére is. Ezzel semmiféle zavart nem okozunk, mivel a szöveg összefüggéséből mindig egyértelműen kiderül, hogy önmagában egy kis kockára gondolunk-e, vagy ráadásul még annak valamelyik lapját is hozzágondoljuk-e. Utóbbi esetben a 2, ill. 3 betű felsorolását a kérdéses lap színét jelölő betűvel kezdjük. E jelölés használatára például a bűvös kocka állásának (állapotának) leírásakor lesz szükségünk vagy egy forgatássorozat eredményének mindenre kiterjedő, tehát a kis kockák helyváltoztatásán kívül azok állásának a megadásával kiegészített leírásakor. Ekkor tapasztalhatjuk annak az előnyét, hogy a csúscsokkák jelölő betűhármakat mindig azonos körüljárási irányban soroljuk fel, s ezáltal

egy-egy csúcskocka mindhárom lapjának egyidejű mozgását könnyebben tudjuk követni (feljegyezni, ill. kiolvasni). A forgatássorozatok elemeit balról jobbra haladva fogjuk egymás után írni, és a könnyebb olvashatóság kedvéért vesszővel választjuk el őket.

Konjugálás

A 4. ábra a bűvös kockát alaphelyzetében, rendezetten mutatja, kissé felülről, jobbról nézve. A nem látható lapok, ill. részeik betűjelét odaírtuk a fülekre is. Az ábrát úgy gondoljuk, mintha a kockának csak a felülete volna meg és az elől látott három lapot kissé előre húztuk volna (füleivel együtt), hogy mögötte a fedett lapok láthatóvá váljanak. Ilyen ábrával a bűvös kocka bárhogy összekevert állapotát megadhatjuk. Mi azonban kissé egyszerűsítjük majd a dolgot, és a hátlapokat elhagyjuk. Így ugyan majd lesz, amit nem tudunk ábrázolni, de remélhetőleg az senkit sem fog zavarni. Egyébként ha a csúcskockának két színét látjuk, ebből megmondhatjuk a harmadikat is. Például az E és F lapoknak 2 közös csúcskockájuk van: EFJ és EBF , és E -ből F felé indulva J -be úgy jutunk, ha az órajárás irányában járjuk körül a csúcsot (mint pontot), B -be viszont ellentett irányú körüljárással.

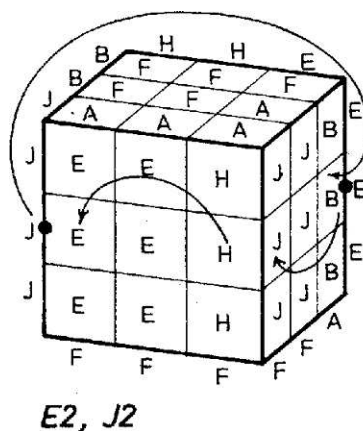


5. ábra

Az 5. ábra azt mutatja, mit látunk a $J3$ és $B1$ forgatások után. Együtt ábrázolhatjuk ezt a két forgatást, mert nincs olyan kis kocka, amelyet mind a kettő forgatna. Jól figyeljük meg: mi a B lapot a 4. ábra módján belülről látnánk, ezért amit a $B1$ forgatással végeztünk, az belülről $B3$ -nak látszik.

Figyeljük meg az alábbiakat is: a $J3$, $B1$ és $B1$, $J3$ sorozatok eredménye ugyanaz, továbbá a kapott helyzetből a $B3$, $J1$ (ill. $J1$, $B3$) sorozatok visszavisznek az alapállásba. Nevezzük az ilyen forgatássorozatokat, tehát egy forgatássorozatot és az annak eredményét hatálytalanító sorozatot egymás inverzének. Egyetlen forgatásból álló sorozat (legegyszerűbb) inverze nem más, mint ugyanannak a lapnak az első forgatást 4 derékszögre kiegészítő elforgatása. Következésképpen egy tetszőleges forgatássorozat egyik (a legegyszerűbb) inverzét úgy kapjuk, hogy ugyanannak a sorozatnak az elemeit fordított sorrendben, továbbá a forgatás mértékét leíró számok közül az 1-est 3-asra, a 3-ast pedig 1-esre módosítva soroljuk fel. (2-es mértékű forgatások inverze is 2-es mértékű.)

Beszélhetünk egy forgatássorozat tükörképéről is, ez azonban – inverztől eltérően – már eredményét tekintve sem egyértelmű, de a színek megfelelő átbetűzésével egy sorozat bármely két tükörképének eredménye egymásba megy át. Azt mondjuk, hogy két forgatássorozat egymás tükörképe, ha az általuk a kockán létrehozott változás is egymás tükörképe valamely, a bűvös kocka középpontján és még 4 kis kocka középpontján áthaladó síkra vonatkozóan. Ha például a bal és jobb oldali lap középsíkját választjuk szimmetriasíknak, akkor a megfelelő tükörképsorozatok egyike úgy adódik az eredetiből, hogy az egyes forgatásokat ugyanolyan sorrendben, de a B és J betűk, valamint az 1 és 3 számok kölcsönös cseréjével - egyébként változatlan módon - soroljuk fel. Itt tulajdonképpen arról van szó, hogy egyszer megcsinálunk a kockával valamit, másodszor pedig a bal és a jobb kéz szerepcseréjével csináljuk meg „ugyanazt”, vagyis helyesebben mondva azt, ahogyan az először végzett mozgásokat egy alkalmasan elhelyezett síktükörben látjuk.

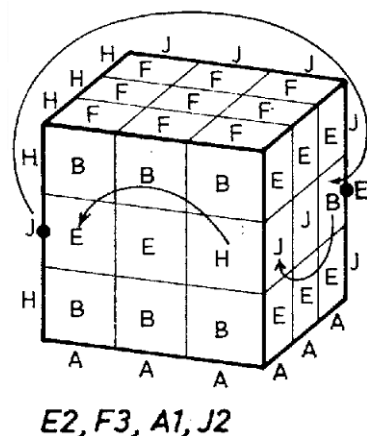


6. ábra

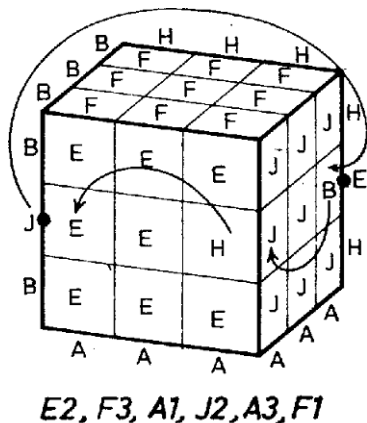
Következő példaként most az $E2, J2$ sorozat eredményét mutatjuk be a 6. ábrán. Figyeljük meg, mi történt a HJ , EJ és EB élközépkockákkal. HJ az EJ állásba, EJ az EB állásba, EB pedig a HJ állásba került. Egy ilyen ciklikus helycserét a

$$\begin{array}{c} HJ \rightarrow EJ \\ \swarrow \quad \searrow \\ EB \end{array}$$

vagy a (HJ, EJ, EB) sémával fejezhetünk ki. Az említett három élközépkockával nyilvánvalóan pontosan ugyanez történik akkor is, ha az $E2, J2$ sorozat előtt, közben vagy után a felső és az alsó lapot tetszőlegesen elfordítjuk. Ha például közbeiktatjuk az $F3$ és $A1$ forgatásokat, akkor az így adódó $E2, F3, A1, J2$ sorozat kezdő és befejező forgatása javarészt ugyanazokat a kis kockákat mozgatja, de éppen ellenkező értelemben, úgy hogy az $E2, F3, A1, J2$ sorozat eredménye (7. ábra) majdnem azonos az $F3, A1$ sorozat eredményével. Kivétel éppen az előbb tekintett három kis kocka. Ha tehát a 7. ábra állapotán most még elvégezzük az $F3, A1$ sorozat inverzét is, akkor a HJ, EJ és EB kis kockák ciklikus cseréjén kívül semmi más látható változás nem történik az alapálláshoz képest. A 8. ábra az így felépített $E2, F3, A1, J2, A3, F1$ sorozat eredményét mutatja, 3 élközépkocka ciklikus cseréjét önmagában.



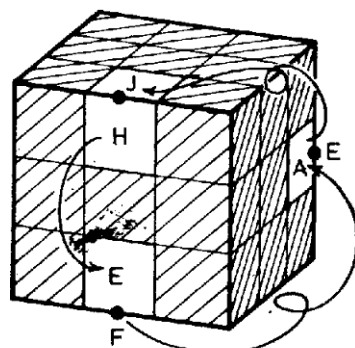
7. ábra



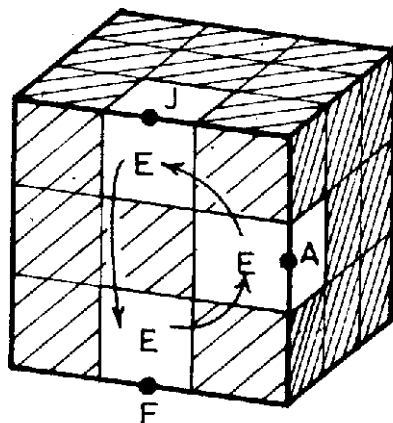
8. ábra

Ha már egy olyan forgatássorozatot találtunk, amely csak 3 kis kockát mozgat, a többinek pedig még csak az állását sem változtatja, akkor az ún. konjugálás művelete segítségével képezhetünk egyéb hasonló tulajdonságú sorozatokat. Ha egy tetszőleges s_1 sorozat után egy másik tetszőleges s_2 sorozatot, majd végül az s_1 sorozat s_1^{-1} inverzét alkalmazzuk, akkor az eredő $s_1 s_2 s_1^{-1}$ sorozatról azt mondjuk, hogy ez az s_2 sorozatnak az s_1 sorozattal való konjugálásával adódott.

A konjugálás gyakorlásául konjugáljuk az előbbi $E2, F3, A1, J2, A3, F1$ sorozatot külön-külön előbb az $E1$, majd a $J2, E1$ sorozattal. Így kapjuk a 9., ill. a 10. ábrán bemutatott – egyéb hely- vagy állásváltozás nélküli – (EA, HJ, EF) , illetve (EA, EJ, EF) helycserét.



E3, F3, A1, J2, A3, F1, E3 9. ábra



J2, E3, F3, A1, J2, A3, F1, E3, J2 10. ábra

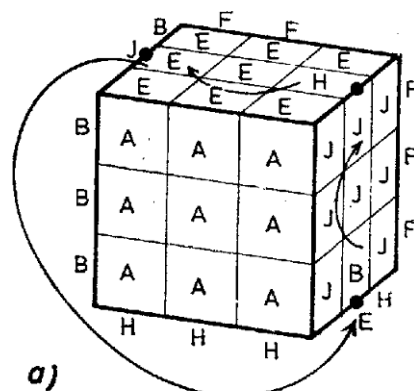
Elemi forgatássorozatok

Eleminek nevezünk egy forgatássorozatot, ha vagy

(α) csak minimális számú (azaz 3) kis kockát cserél, vagy pedig

(β) csak minimális számú (azaz 2) kis kockát pörget, és mindkét típus esetén az összes többi kis kocka alapállásban a helyén marad. Az így értelmezett elemi sorozatok száma végtelen sok, de „csak” körülbelül 3000 különböző állást hozhatnak létre – mindig az alapállásból kiindulva. Ez a szám is lényegesen csökkenthető, ha a színeket kifejező E, H, B, J, F, A szimbólumok különböző átértelmezéseivel egymásból származó sorozatokat (ill. állásokat) nem különböztetjük meg egymástól.

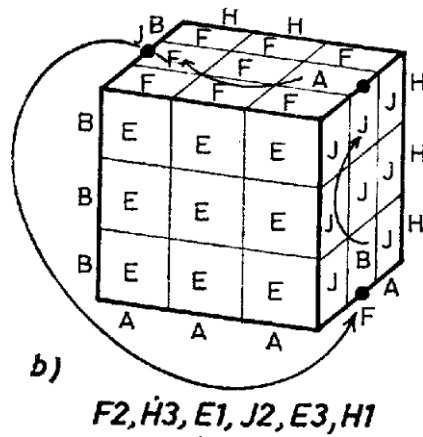
Ha például az alapállású kockát hanyatt döntjük, miközben a B és J lapokat a bal, ill. a jobb oldalon hagyjuk, akkor a 8. ábrával bemutatott forgatássorozatot a színek átbetűzése előtt a 11a ábra mutatja, a színek átbetűzése, tehát az A, E, F, H betűknek rendre az E, F, H, A betűkkel való helyettesítése után a 11b ábra mutatja.



a)

E2, F3, A1, J2, A3, F1,

11. a) ábra

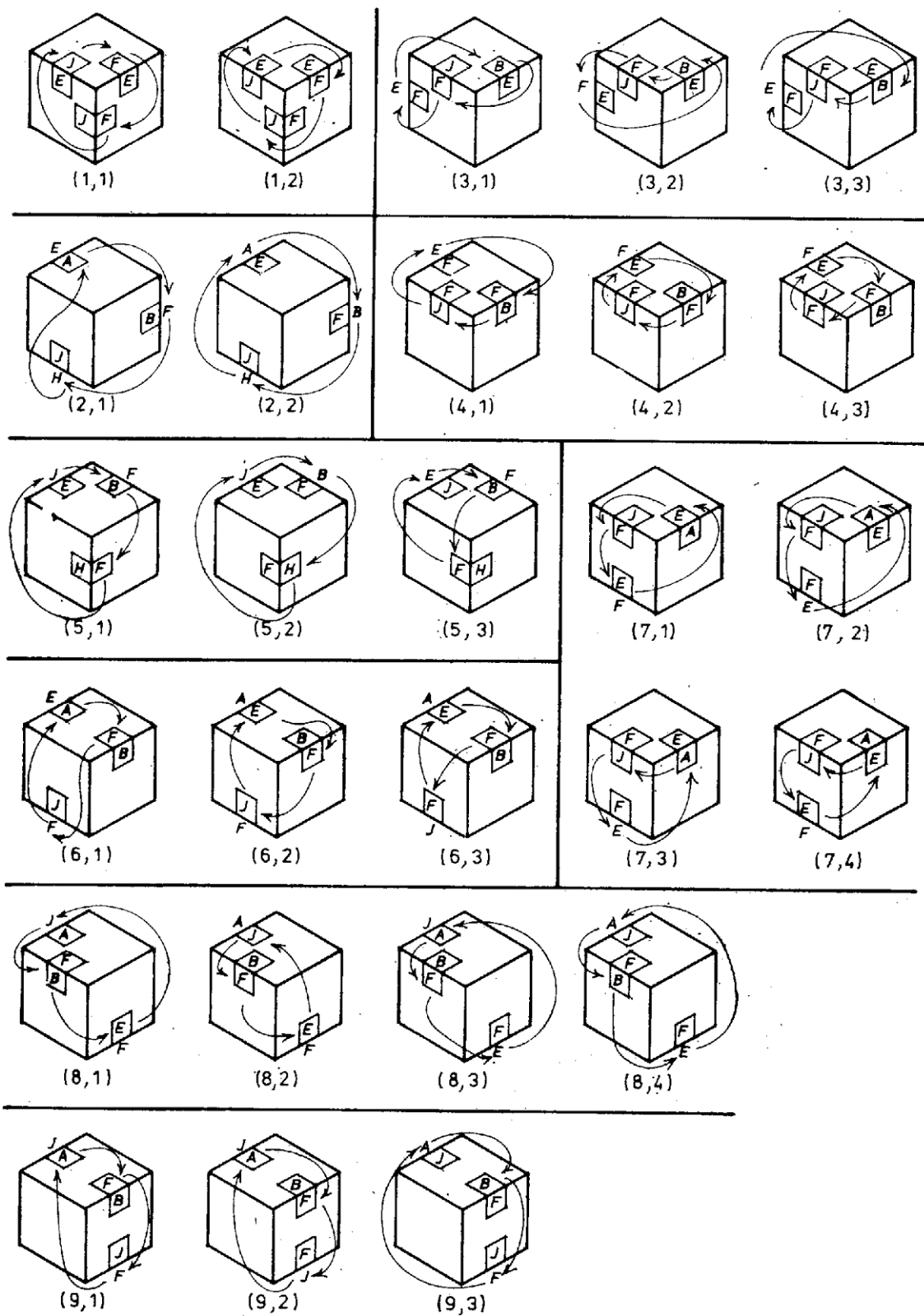


11. b) ábra

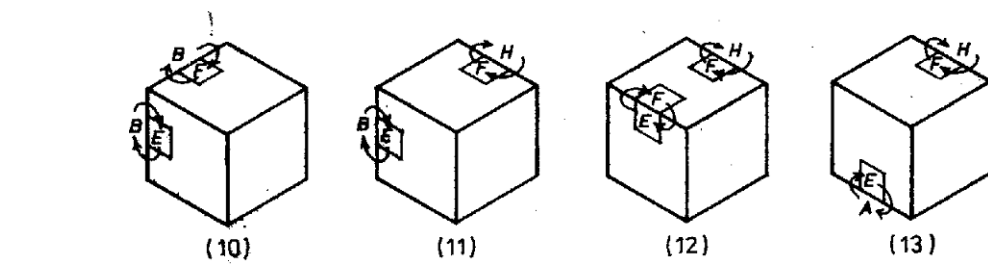
A) 3 élközépkockát cserélő elemi forgatássorozatok (12. A ábra):

- (1.1) J1, H1, B1, E1, F1, E3, B3, H3, J3, F3
- (1.2) J1, F3, J3, E3, B3, H3, F3, H1, B1, E1, J1, F2, J3
- (2.1) J3, F1, J3, B1, E2, J1, B3, F1, J1
- (2.2) F2, A1, E1, A1, H1, J3, H3, A3, E3, F3, J1, F3, A3
- (3.1) E1, F3, E3, B3, H3, J3, F1, J1, H1, B1
- (3.2) F1, B3, H3, J3, E3, F3, E1, J1, H1, B1
- (3.3) B3, E2, F1, J3, B1, E2, J1, B3, F1, E2, B1
- (4.1) E2, F1, J3, B1, E2, J1, B3, F1, E2
- (4.2) H1, B1, F1, B3, H3, J3, E3, F3, E1, J1
- (4.3) J1, B3, H1, J3, B1, F2, J1, B3, H1, J3, B1
- (5.1) B1, E1, J1, B3, F2, J3, B1, E1, B3
- (5.2) J1, H2, F1, J1, B3, H2, J3, B1, F1, H2, J3
- (5.3) F3, E2, F3, J3, A3, B3, E1, B1, A1, J1, F1, E1, F1
- (6.1) F1, J3, B1, E2, J1, B3, F1
- (6.2) E2, H1, B1, F1, B3, H3, J3, E3, F3, E1, J1, E2
- (6.3) E2, J1, B3, H1, J3, B1, F2, J1, B3, H1, J3, B1, E2
- (7.1) J1, E3, F3, A1, J2, F1, A3, E3, J3
- (7.2) J3, F3, J3, E1, J1, F1, B1, A1, E3, A3, J1, B3
- (7.3) J3, B3, F3, E3, F1, B1, A1, J1, E1, J3, A3, J1
- (7.4) J3, F1, A3, B3, F3, A1, E2, F1, A3, B3, F3, A1, J1
- (8.1) B2, A1, J1, B3, E2, J3, B1, A1, B2
- (8.2) J1, E3, F1, E1, J1, H1, B1, F3, B3, H3, J2
- (8.3) J3, B3, H3, J3, B1, F2, J1, B3, H3, J1, B1
- (8.4) J2, H3, J3, F3, J1, H1, B1, E1, F1, E3, J2, B3
- (9.1) J2, E3, H1, F2, E1, H3
- (9.2) A3, J1, F3, E1, F3, A1, J2, F1, A3, E1, F1, J3, A1
- (9.3) B1, A1, E3, A1, E3, H1, J2, E1, H3, A1, E1, A3, B3

Az elemi sorozatok számának eme redukciója után a csúcskockák 3-as cseréire 46, az élközépkockák 3-as cseréire 76, a csúcskockák páros pörgetésére 3, az élközépkockák páros pörgetésére pedig 5 (összesen tehát 130) különböző elemi forgatássorozat marad. Ez még mindig sok egy kicsit, ezért csak az élközepeket mozgatókat soroljuk fel, és ezek közül is csak azokat, amelyek invertálással vagy tükrözéssel (esetleg mindkettővel) sem származtathatók egymásból, de amelyekből e műveletek segítségével (természetesen konjugálás nélkül) az összes többi elemi sorozat leszármaztatható. A sorozatokat aszerint csoportosítjuk, hogy a mozgatott kis kockáknak mi az egymáshoz viszonyított relatív helyzetük, az állásra való tekintet nélkül. A 12.A–12.B ábrákon bemutatjuk a felsorolásra kerülő elemi sorozatok hatását.



12. A). ábra



12. B) ábra

Látjuk, hogy az elemi forgatássorozatokból gazdag választék áll rendelkezésre. Egyébként a rendezéshez elég az *A)* és *B)* pont alatti sorozatok közül néhánynak az ismerete is.

Ha meg akarjuk határozni, hogy valamely 3 kis kocka cseréje (vagy több kis kocka valamilyen más permutációja) hogyan származtatható egy, az *A)* csoportból való elemi sorozat által megvalósított csere többszöri alkalmazásával, ehhez jó segédeszköz a következő.

Készítsünk annyi számozott (vagy máshogy megkülönböztetett) kis korongot, ahány kis kockát feltehetően használni fogunk. A szóban forgó kis kockák helyét a síkban, például egy rajzlapon is ábrázoljuk oly módon, hogy minden egyes korong esetén annak jelével azonos jellel megjelöljük alapállásának a helyét. Ezután rajzoljunk köröket (vagy más zárt görbéket) a megengedett 3-as cserék (ciklikus mozgások) pályája kijelölésére. Feladat: a korongok véletlenszerű lerakása után mely állásokból és hogyan juthatunk el az alapállásba (amikor is minden korong a saját jelével azonos jelű helyen fekszik) oly módon, hogy a korongoknak csak bizonyos – egy-egy berajzolt kör vagy görbe kerülete mentén elhelyezkedő – 3-as csoportjainak azonos irányú együttes körforgását engedjük meg?

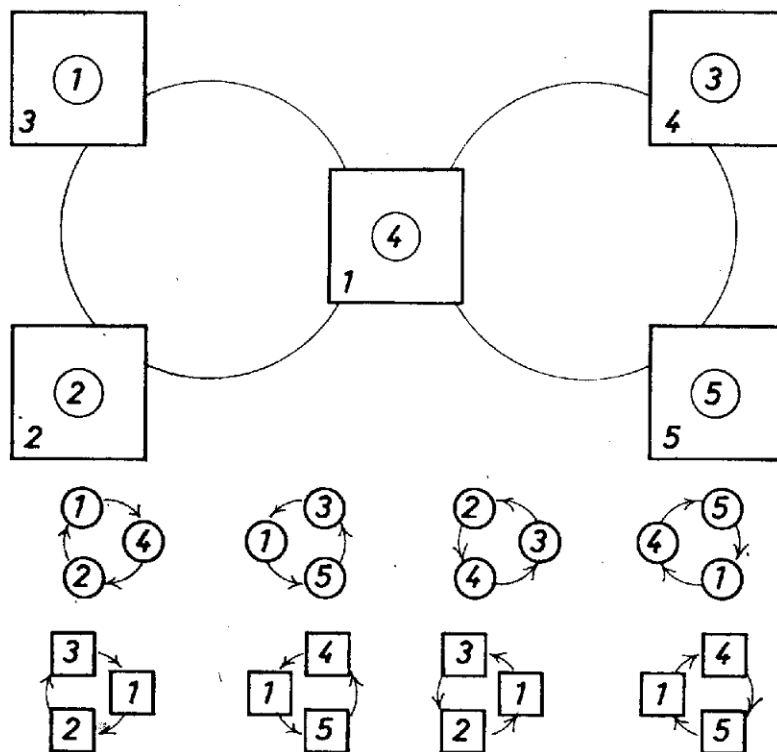
B) 2 élközépkockát pörgető forgatássorozatok (12.B ábra):

(10) $F1, E1, J1, H1, B1, F3, E1, F3, E3, B3, H3, J3, F1, E3$

(11) $E1, J1, H1, B1, F3, E1, F3, E3, B3, H3, J3, F1, E3, F1$

(12) $J1, H1, B1, F3, E1, F3, E3, B3, H3, J3, F1, E3, F1, E1$

(13) $E2, J1, H1, B1, F3, E1, F3, E3, B3, H3, J3, F1, E3, F1, E3$



13. ábra

Például 5 korong és 2 kör esetén a 13. ábra felső sora szerinti helyzetből a korongoknak rendre a középső sor szerinti körforgását, azaz helyükkel leírva az alsó sor szerinti cseréket elvégezve, ezek után mind az öt korong saját helyére kerül.

Feladatok

1. Hányféleképpen lehet a bűvös kockát összerakni?
2. Nevezzük sarok eleminek azokat a forgatássorozatokat, amelyek két sarkot felcserélnek, vagy egyidejűleg forgatnak, miközben a többi sarkot az eredeti helyén és helyzetében hagyják, de az élközépekre gyakorolt hatásuk tetszőleges. Adjunk meg lehetőleg rövid sarok elemi forgatássorozatokat.
3. Adjunk meg a sarkokra ható elemi sorozatokat.
4. Valaki a rendezett kockáján a függőleges lapokra a lapok közepén levő kis lapokra felfelé, a vízszintes lapokra pedig jobbra mutató nyilakat rajzolt. Ezután néhányszor megforgatta a lapokat, míg a kocka újra rendezett nem lett. Meg lehet-e mondani: most hogy állnak a nyilak?
5. El lehet-e érni egy rendezett kocka alkalmas forgatásaival, hogy minden lapon minden szín szerepeljen?

Ezeknek a feladatoknak a megoldása 1980. május 10-ig küldhető be a szerkesztőség címére. A borítékra, kérem, írják rá: „Bűvös kocka”. Minden egyéb, a bűvös kockára vonatkozó ötletet örömmel olvasok, akár kapcsolódik ehhez a cikkhez, akár nem.