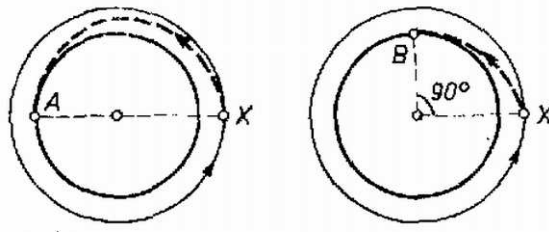


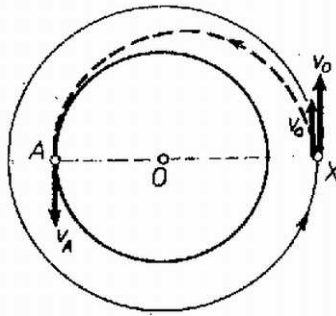
1. Egy $m = 12$ t tömegű űrhajó $h = 100$ km magasságban körpályán kering a Hold körül. Abból a célból, hogy elérje a Holdat, a hajtóművet rövid időre bekapcsolják az X pontban. A rakétából kiáramló gázok sebessége a rakétához képest $u = 10\,000$ m/s. A Hold sugara $R = 1700$ km, felszínén a szabadesés gyorsulása $g = 1,7$ m/s². Az űrhajó a megközelítést kétféleképp hajthatja végre (1. ábra), és az a kérdés, hogy a két esetben mennyi üzemanyagot fogyaszt? a) A Holdat az X ponttal ellentétes A pontban éri el. b) Az X pontban a Hold középpontja felé adott impulzussal eléri azt, hogy az űrhajó B -ben érintőlegesen éri el a Hold felszínét.



1. ábra

Megoldás. A nehézségi gyorsulás a Hold felszínén $g = fM/R^2$ (f a tömegvonzási állandó, M a Hold tömege). A körpályán keringő űrhajó eredeti sebessége v_0 , erre nézve

$$\frac{v_0^2}{R+h} = \frac{fM}{(R+h)^2} = \frac{gR^2}{(R+h)^2}, \quad v_0 = \sqrt{\frac{gR^2}{R+h}} = 1652 \text{ m/s.}$$



2. ábra

a) Az űrhajó a rakéta ellenirányú működtetésével sebességét v_0 -ról egy bizonyos v_a -ra csökkenti. Ezután ellipszis-pályán kering; az ellipszis nagytengelyének végpontjai A és X (2. ábra). A sebesség A -ban v_A , X -ben v_a . A területi sebesség állandósága (Kepler II. törvénye) szerint:

$$v_A R = v_a (R+h), \quad v_A = \frac{R+h}{R} \cdot v_a;$$

A sebesség v_a -ról v_A -ra növekszik, a mozgási energia gyarapodását a gravitációs energia csökkenése fedezi:

$$\frac{mv_A^2}{2} - \frac{mv_a^2}{2} = \frac{fmM}{R} - \frac{fmM}{R+h},$$

ebből:

$$v_A^2 - v_a^2 = 2fM \cdot \frac{h}{R(R+h)} = \frac{2ghR}{R+h} = 0,321 \cdot 10^6 \text{ (m/s)}^2.$$

Az impulzustörvényből származtatva v_A értéket felhasználva

$$\begin{aligned} v_a^2 \left[\left(\frac{R+h}{R} \right)^2 - 1 \right] &= v_a^2 \cdot \frac{h(2R+h)}{R^2} = \frac{2ghR}{R+h}, \\ v_a^2 &= \frac{2gR^3}{(R+h)(2R+h)} = 2,65 \cdot 10^6 \text{ (m/s)}^2, \\ v_a &= 1628 \text{ m/s}, \quad v_A = 1724 \text{ m/s.} \end{aligned}$$

Az ellenrakétázással létrehozandó sebességváltoztatás:

$$\Delta v = v_0 - v_a = 24 \text{ m/s.}$$

2. Egy alumíniumdarab tömegét sárgaréz súlyokkal mérjük, először száraz, majd 15,2 Hgmm parciális vízgőznyomású nedves levegőben. A teljes nyomás (760 Hgmm) és a hőmérséklet (20°C) mindkét esetben ugyanaz. Legalább mekkora tömegű alumíniumdarab esetében vesszünk észre különbséget a két mérés között, ha a mérleg érzékenysége 0,1 mg? Az alumínium sűrűsége 2,7 g/cm³, a sárgarézé 8,5 g/cm³.

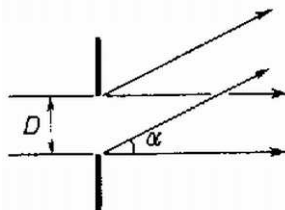
Megoldás. A vízgőz parciális nyomása a teljes nyomás ötvened része, tehát a levegő térfogatának ötvened része van vízgőzzel helyettesítve. 20°C-on a levegő sűrűsége 0,0012 g/cm³, a vízgőzé 0,00075 g/cm³, a nedves levegőnké:

$$\frac{49 \cdot 0,0012 + 1 \cdot 0,00075}{50} \text{ g/cm}^3 = 0,00119 \text{ g/cm}^3.$$

A száraz és nedves levegő sűrűségének különbsége így 0,00001 g/cm³.

1 gramm alumínium térfogata 0,370 cm³, 1 gramm sárgarézé 0,117 cm³, ezek különbsége 0,253 cm³. A száraz levegőt nedvességgel felcserélve 1 grammos testek kiegyensúlyozásakor a felhajtóerők különbsége 0,253 cm³ · 0,00001 g/cm³ = 0,0000025 grammos tömeg súlyát jelenti. Mérlegünk 0,0001 grammos tömeg súlyát képes érzékelni, ezért az eltérés akkor válik észrevehetővé, ha a mérendő alumíniumdarab tömege az 1 g-os mintáénál 0,0001 g : 0,0000025 g = 40-szer nagyobb.

3. A Hold felszínére egy $\lambda = 0,69 \mu\text{m}$ hullámhosszú fényt adó lézer sugarát irányítjuk egy $D = 2,6 \text{ m}$ átmérőjű parabolatükrös távcső segítségével. A Holdon $d = 20 \text{ cm}$ átmérőjű síktükört helyeztek el a fény visszaverése céljából. Ez a tükör a fényt pontosan a földi távcső felé veri vissza; a távcső fókuszában fotoérzékelő van. A Föld–Hold távolság $L = 380\,000 \text{ km}$. a) Milyen szögpontossággal kell beállítani a távcsövet? b) Az eredetileg kibocsátott energiából mennyit fog fel a fotoérzékelő? (A veszteségektől eltekintünk.) c) Ha a fénylökés energiája 1 joule, akkor szabad szemmel megfigyelve hány foton jutna szemünkbe? A pupilla átmérője 5 mm. d) Mennyi energiát kapna vissza a fotoérzékelő, ha a Holdon nem helyeztünk volna el tükört? A Hold felszíne a ráeső fény 10%-át minden irányban egyenletesen veri vissza.



5. ábra

Megoldás. a) A lézer csak mint erős, pontszerű fényforrás szerepel, a mi esetünkben az irányításban nincs szerepe. A távcső $\pi(D/2)^2 = 5,31 \text{ m}^2$ nagyságú nyílasterülete mint fényt kibocsátó rés szerepel, és a sugárnyalábot a diffrakció szélesíti ki (5. ábra). A rés Huygens szerint mint hullámfelület működik, az eredeti irányban adja a legnagyobb intenzitást és $\lambda = D \sin \alpha$ irányban az első interferenciás kioltást. Legjobb volna, ha a tengely pontosan a holdi tükör felé mutatna. Ha $\sin \alpha = \lambda/D$ szögnél nagyobb az irányeltérés, akkor biztosan alig kap fényt a holdi tükör. Ez a szög:

$\alpha \approx \sin \alpha = \frac{\lambda}{D} = \frac{0,69 \cdot 10^{-6} \text{ m}}{2,6 \text{ m}} = 2,65 \cdot 10^{-7} = 0,055''$. Ennél lényegesen pontosabb legyen az irányítás. E szögön belül sem egyenletes a fényeloszlás, a széle felé csökken, ezért minden további számításunk csak közelítő pontosságú.

b) Az ismertett diffrakció következtében a Holdon egy megvilágított kör keletkezik, amelynek átmérője $\alpha L = \frac{\lambda}{D} \cdot L = 101 \text{ m}$, területe $\pi(L\lambda/2D)^2 = 7987 \text{ m}^2$. Ezen oszlik szét az E összes kisugárzott energia és így az átlagos energiasűrűség:

$$E : \frac{\pi\lambda^2 L^2}{4D^2} = \frac{4D^2 E}{\pi\lambda^2 L^2} = 0,125 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{m}^2} E.$$

A d átmérőjű és $\pi(d/2)^2 = 0,0314 \text{ m}^2$ területű holdi síktükörre jutó energia:

$$\frac{4D^2 E}{\pi\lambda^2 L^2} \cdot \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \left(\frac{Dd}{L\lambda}\right)^2 \cdot E = 3,94 \cdot 10^{-6} E.$$

A síktükör mindezt az energiát visszadobja, de ismét a diffrakció miatt $\lambda/d = \beta = 3,45 \cdot 10^{-6} \text{ radián} = 0,71''$ nagyságú szögtartományban (6. ábra, nem méretarányos). A Földön $\beta L = \frac{\lambda L}{d} = 1310 \text{ m}$ átmérőjű, $1,72 \cdot 10^6 \text{ m}^2$ területű kör kap fényt. Ezen oszlik szét a Hold által visszavert $(Dd/L\lambda)^2 E$ energia, tehát a visszavert fény által a Földön létrehozott energiasűrűség:

$$\left(\frac{Dd}{L\lambda}\right)^2 E : \pi\left(\frac{L\lambda}{2d}\right)^2 = \frac{4D^2 d^4}{\pi L^4 \lambda^4} \cdot E = 2,3 \cdot 10^{-12} \frac{1}{\text{m}^2} E.$$

A $\pi(D/2)^2$ területű észlelő távcsőbe jutó energia:

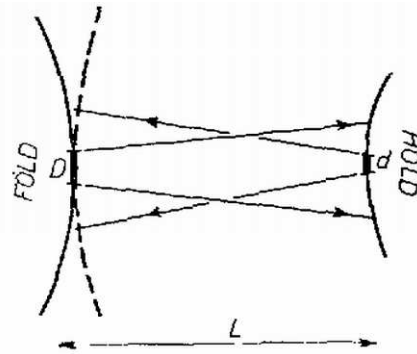
$$\frac{4D^2d^4E}{\pi L^4\lambda^4} \cdot \pi\left(\frac{D}{2}\right)^2 = \left(\frac{Dd}{L\lambda}\right)^4 E = 15,8 \cdot 10^{-12} E.$$

Tehát az eredeti energia 16 billiomod részét kapjuk vissza.

c) A pupilla területe $\pi \cdot 2,5^2 \text{ mm}^2 = 20 \text{ mm}^2 = 20 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$; ezt kell szorozni a Földön létrejött $2,3 \cdot 10^{-12} \frac{1}{\text{m}^2} \cdot E$ energiasűrűséggel ($E = 1 \text{ joule}$), az energia $46 \cdot 10^{-18} \text{ joule}$.

A piros fényünk rezgésszáma $f = (3 \cdot 10^8 \text{ m/s}) : (0,69 \cdot 10^{-6} \text{ m}) = 4,35 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$, fotonjának energiája: $hf = 2,89 \cdot 10^{-19} \text{ joule}$. A szembe jutó fotonok darabszáma $46 \cdot 10^{-18} : 2,89 \cdot 10^{-19} = 155 \text{ foton}$.

Vajon észrevehetnénk-e szabad szemmel a visszavert fényt? Szemünk ideghártyájában csak a pálcikák fokozott érzékenysége vehetnénk hasznát. Ezek a $0,51 \mu\text{m}$ hullámhosszú zöld fény iránt a legérzékenyebbek, ekkor alkalmas körülmények között néhány fotont is érzéklni lehet. A pálcikák érzékenysége $0,6 \mu\text{m}$ -nél ennek százada, és még nagyobb hullámhosszú fény iránt teljesen érzéketlenek. Így szó sem lehet a szabad szemmel történő megfigyelésről. Azonkívül a Hold erős fénye is zavarna.



6. ábra

d) Ha nem helyezünk a Holdra tükröt, akkor a Holdra érkező összes fény tizede, $0,1E$ verődik vissza. (A 101 méteres kör teljes egésze könnyen ráfér a Holdra.) De a sokkal nagyobb, $0,1E$ energia most L sugarú, $2\pi L^2 = 0,907 \cdot 10^{18} \text{ m}^2$ területű félkörön oszlik szét, és így a Földön létrehozott energiasűrűség:

$$\frac{0,1E}{2\pi L^2} = 1,1 \cdot 10^{-18} \frac{1}{\text{m}^2} \cdot E,$$

ebből a távcső által felfogott energia:

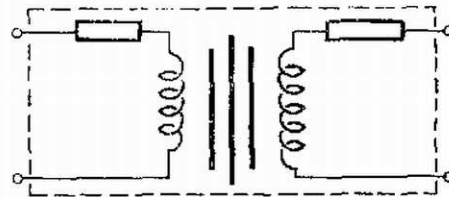
$$\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot \frac{0,1E}{2\pi L^2} = 5,9 \cdot 10^{-18} E.$$

A b) esethez képest az energia-arány:

$$\left(\frac{Dd}{L\lambda}\right)^4 \cdot E : \left[\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot \frac{0,1E}{2\pi L^2}\right] = 80 \cdot \frac{D^2 d^4}{L^2 \lambda^4} = 27 \cdot 10^6.$$

Az eredmény több milliószor rosszabb a holdi tükrök nélkül.

Kísérleti feladat Egy négy kivezetéses „fekete doboz” belsejét kellett mérésekkel felderíteni. Váltó- és egyenáramú áramforrások és mérőműszerek, valamint tolóellenállás adva voltak.



7. ábra

A doboz belsejét a 7. ábra mutatja. A következő megállapításokra kerülhetett sor.

A dobozban nincs áramforrás (sehogyan sem jön ki belőle semmi).

A dobozban nincs egyenirányító (átsarkalásokkor nem változnak a mérési adatok).

A dobozban két, egyenáram szempontjából nem összefüggő alkatrész van.

Ezután mérhetők az ellenállások, induktivitások és a kölcsönös indukció együtthatója.