

1. Legyenek p és q olyan természetes számok, amelyekre fennáll, hogy

$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}.$$

Bizonyítsa be, hogy p osztható 1979-cel.

(NSZK, 6 pont)¹

2. Adva van egy ötoldalú hasáb: alaplapja az $A_1A_2A_3A_4A_5$, fedőlapja pedig a $B_1B_2B_3B_4B_5$ ötszög. E két ötszög mindegyik oldalát, továbbá valamennyi A_iB_j szakaszt ($i, j = 1, 2, \dots, 5$) vörösre vagy zöldre színezzük. Minden olyan háromszögnek, amelynek csúcsai egyúttal a hasáb csúcspontjai is, és amelynek mindegyik oldala színezett, van két különböző színű oldala.

Mutassa meg, hogy ekkor az alaplapnak és a fedőlapnak összesen tíz oldala mind egyforma színű.

(Nagy-Britannia, 7 pont)

3. Adva van a síkban két egymást metsző körvonal: k_1 és k_2 . Jelölje A a két metszéspont egyikét. Két tömegpont: P_1 és P_2 mozog k_1 -en, illetve k_2 -n állandó sebességgel ugyanabban a forgási irányban. Mozgásukat egy időben kezdik az A pontban, és egy-egy körüljárást követően ismét egyidejűleg érkeznek az A pontba.

Bizonyítsa be, hogy van a síkban olyan rögzített P pont, amelyre a mozgás minden időpontjában érvényes a

$$PP_1 = PP_2$$

egyenlőség.

(Szovjetunió, 7 pont)

4. Adva van a Π síkban egy P és a Π síkon kívül egy Q pont. Határozza meg a Π síknak valamennyi olyan R pontját, amelyre a

$$\frac{QP + PR}{QR}$$

hányados értéke maximális.

(USA, 6 pont)

5. Határozza meg az összes a valós számot, amelyekhez léteznek a

$$\sum_{k=1}^5 kx_k = a, \quad \sum_{k=1}^5 k^3 x_k = a^2, \quad \sum_{k=1}^5 k^5 x_k = a^3$$

egyenlőségeket kielégítő x_1, x_2, x_3, x_4 és x_5 nemnegatív valós számok.

(Izrael, 7 pont)

6. Legyen A és E egy szabályos nyolcszög két átellenes csúcsa. Egy béka az A csúcsból kiindulva kezd ugrálni. A nyolcszög bármely csúcsából – az E -t kivéve – a mellette levő egyik csúcsba ugorhat. Ha az E csúcsba ér, akkor megáll, és ott marad.

Legyen a_n a pontosan n ugrásból álló különböző utak száma.

Bizonyítsa be, hogy $a_{2n-1} = 0$, $a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^{n-1} - y^{n-1})$, $n = 1, 2, 3, \dots$, ahol $x = 2 + \sqrt{2}$ és $y = 2 - \sqrt{2}$.

Megjegyzés: Egy pontosan n ugrásból álló út a csúcsoknak olyan $P_0, P_1, \dots, P_n$ sorozata, amely eleget tesz az alábbi feltételeknek:

I. $P_0 = A, P_n = E$;

II. minden, $0 \leq i \leq n-1$ egyenlőtlenséget kielégítő i -re P_i különbözik E -től;

III. minden, $0 \leq i \leq n-1$ egyenlőtlenséget kielégítő i -re P_i és P_{i+1} szomszédos csúcsok.

(NSZK, 7 pont)

*

A zsűri az egyetlen különdíjat a 3. feladat különösen elegáns és egyszerű megoldásáért LE BA KHANH TRINH 17 éves vietnami versenyzőnek adta ki. Az alábbi megoldás az ő dolgozatának alapján készült.

3. Adva van a síkban két egymást metsző körvonal: k_1 és k_2 . Jelölje A a két metszéspont egyikét. Két tömegpont: P_1 és P_2 mozog k_1 -en, illetve k_2 -n állandó sebességgel ugyanabban a forgási irányban. Mozgásukat egy időben kezdik az A pontban, és egy-egy körüljárást követően ismét egyidejűleg érkeznek az A pontba.

Bizonyítsa be, hogy van a síkban olyan rögzített P pont, amelyre a mozgás minden időpontjában érvényes a

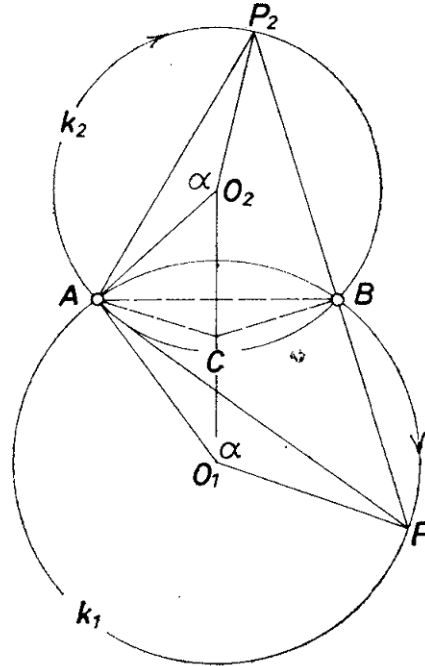
$$PP_1 = PP_2$$

egyenlőség.

¹A zárójelben a javasoló ország neve és a kapható maximális pontszám szerepel.

Megoldás. Jelöljük a k_1 , ill. k_2 körök középpontját O_1 -gyel, ill. O_2 -vel, a két kör A -tól különböző metszéspontja legyen B . Először megmutatjuk, hogy a P_1, P_2, B pontok a mozgás bármely pillanatában egy egyenesen vannak.

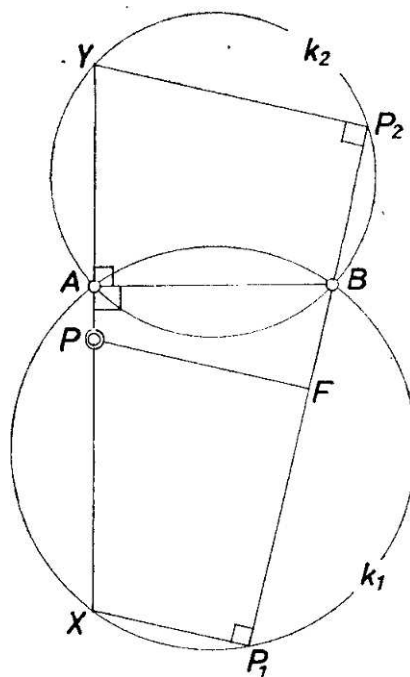
Ehhez figyeljük meg a következőket: ha az $AB_1C_1, AB_2C_2, AB_3C_3, \dots$ hasonló, és egyező körüljárású háromszögeknél a $B_1, B_2, B_3, \dots$ pontok egy egyenesen vannak, akkor a $C_1, C_2, C_3, \dots$ pontok is egy egyenesen fekszenek. Ez egyszerűen következik abból, hogy a $B_1, B_2, B_3, \dots$ pontokat az A középpontú, B_1AC_1 szögű és AC/AB arányú forgatványújtás viszi át rendre a $C_1, C_2, C_3, \dots$ pontokba, és a forgatványújtás egyenestartó. Ez igaz abban az esetben is, ha a hasonló háromszögek helyett egy egyenesbe eső hasonló ponthármakat mondunk.



1. ábra

A feladat feltétele szerint a P_1, P_2 pontok a körök középpontjai körül állandó szögsebességgel forognak. Tegyük fel, hogy pl. a kiindulási A helyzettől α szöggel fordultak el ($0 < \alpha < 2\pi$) (1. ábra). Az AO_1P_1, AO_2P_2 egyező körüljárású, hasonló, egyenlő szárú (esetleg elfajult) háromszögek. Mivel az O_1O_2 egyenes az AB szakasz felező merőlegese, szerkeszthetünk rajta olyan C pontot, hogy az ACB és AO_1P_1 háromszögek hasonlóak és egyező körüljárásúak legyenek. Előző megjegyzésünk értelmében így a P_1, P_2, B pontok valóban egy egyenesen vannak, mivel O_1, O_2, C is egy egyenesen fekszenek.

Elegendő most már azt bizonyítanunk, hogy a P_1P_2 szakasz felező merőlegese – a P_1P_2 szakasz elhelyezkedésétől függetlenül – átmegy egy rögzített ponton. Messe az AB -re A -ban állított merőleges a k_1 , ill. k_2 kört X -ben, ill. Y -ban, és legyen XY felezőpontja P (2. ábra).



2. ábra

A BX és BY szakaszok Thalész tétele szerint körökben átmérők, ezért az XP_1P_2 és YP_2P_1 derékszög, az XP_1P_2Y négyszög tehát derékszögű trapéz (hurkolt is lehet, és derékszögű háromszöggé is fajulhat). Következésképpen a P_1P_2 szár felező merőlegese átmegy a rögzített XY szár P felezési pontján; ezzel állításunkat igazoltuk.