I. forduló

1. Hány olyan háromjegyű természetes szám van, amely a 7, a 11 és a 13 számok egyikével sem osztható?

2. Adott az $ABCD$ téglalap. Legyen $AB = a$, $AD = b$. Minden csúcsból kiindulva felmérünk az oldalakra ugyanolyan körüljárási irányban egy x hosszúságú szakaszt. Így jutunk rendre az A_x, B_x, C_x, D_x pontokhoz. Mekkorának válasszuk x-et ahhoz, hogy az $A_xB_xC_xD_x$ négyszög területe minimális legyen? Mekkora ez a minimális terület?

3. Szerkesszünk adott körbe olyan derékszögű háromszöget, amelybe adott sugarú kör írható.

4. Egy négyzet alapú (az alap szögpontjai A, B, C, D) egyenlő oldalélű gúla csúcsa legyen E. Jelöljük P-vel azt az AE oldalélt $3:1$ arányban osztó pontot, amelyre $EP : PA = 3$, továbbá Q-val a CE oldalél felezőpontját. Milyen arányban osztja a BE oldalélt a D, P és Q pontokon átfektetett sík?

5. Bizonyítsuk be, hogy ha az a, b, c valós számokra fennáll az $a + 2b + 3c \geq 14$ egyenlőtlenség, akkor érvényes az $a^2 + b^2 + c^2 \geq 14$ egyenlőtlenség is! Mikor teljesül a 2. képletben a pontos egyenlőség?

6. Egy szám egész része az a legnagyobb egész szám, amely még nem nagyobb a számnál. Adjuk meg zárt alakban az 1-től n^2-ig terjedő egész számok négyzetgyöke egész részének összegét.

7. Adott félkörbe négyzetet írtunk úgy, hogy a négyzet két csúcsa a félkör átmérőjén, másik két csúcsa a félköríven van. Ugyanebbe a félkörbe a négyzettel egyenlő területű derékszögű háromszöget is írtunk úgy, hogy a háromszög átfogója a félkör átmérője. Igazoljuk, hogy a háromszög beírt körének középpontja a négyzet egyik oldalán van.

8. Egy karóra számlapja fölött közös tengely körül forog az óra nagymutatója, kismutatója és másodpercmutatója. 0 órakor mindhárom mutató pontosan a számlap 12-vel jelölt beosztására mutat. Ettől kezdve a mutatók rendeltetésüknek megfelelően és pontosan járnak körbe. Vannak-e időpontok, amikor a mutatók páronként $120°$-os szöget zárnak be egymással? Ha igen, melyek ezek az időpontok?

II. forduló

A szakközépiskolák, valamint a gimnáziumok általános tantervű III–IV. osztályai részére

1. Az ABC háromszögben a C csúcsnál kétszer akkora szög van, mint az A-nál. Milyen értékeket vehet fel az AC/AB hányados?

2. Egy edényben egy liter bor, egy másikban egy liter víz van. Az első edényből átöntünk egy decilitert a másodikba, összekeverjük, majd a keverékből egy decilitert visszaöntünk az első edénybe. Számítsuk ki az első edényben levő bor mennyiségének határértékét, ha a fenti eljárást végtelen sokszor ismételjük. (Az egyes átöntések során tökéletes keveredést tételezünk fel, és az eljárás során nincs folyadékveszteség.)

3. Egy háromszög mindhárom oldalegyenesét érintő négy kör sugara egy mértani sorozat egymást követő négy eleme. Mekkora a háromszög legnagyobb szöge?

A gimnáziumok matematika I. szakosított tantervű III–IV. osztályai részére

1. Bizonyítsuk be, hogy egy háromszög akkor és csakis akkor derékszögű, ha benne a szögek szinuszainak az összege 1-gyel nagyobb a szögek koszinuszainak összegénél.

2. Messük el az a élhosszúságú szabályos tetraédert két kitérő élével párhuzamos síkkal. Mekkora lehet maximálisan annak a négyoldalú gúlának a térfogata, amelynek alaplapja az így keletkezett síkmetszet, az alappal szemközti csúcsa pedig a tetraéder középpontja?

3. A $[0, 2a]$ számközt az $a_0 = 0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1} < a_n = 2a$ pontokkal osszuk n részre úgy, hogy bármely két osztópont távolsága a-tól különböző legyen. Válasszuk ki azokat az (a_i, a_k) (nem feltétlenül különböző elemekből álló) osztópont-párokat, amelyekhez található olyan x szám, hogy

$$a_i < x < a_{i+1} \quad \text{és} \quad a_k < x + a < a_{k+1}$$

teljesül. Bizonyítsuk be, hogy pontosan n darab ilyen (a_i, a_k) pár létezik!

A gimnáziumok matematika II. szakosított tantervű III–IV. osztályai részére

1. Mutassuk meg, hogy egy háromszög csúcsain átmenő és a kerületét felező egyenesek egy T pontban metszik egymást, és a háromszög súlypontja harmadolja a beírt kör középpontját T-vel összekötő szakaszt.

2. Egy külkereskedelmi vállalatnak 70 dolgozója van. Bármely két, A és B dolgozójához található olyan nyelv, melyet A beszél és B nem, és olyan is, amelyet B beszél és A nem. Legalább hány különböző nyelvet beszélnek a vállalat dolgozói?

3. Egy $n \times n$-es táblázat minden mezőjében 1, -1 vagy 0 áll. Bármelyik két sort választjuk is ki, és a két sor azonos oszlopaiban álló elemeit összeszorozzuk, a kapott szorzatok összege zérus. Bizonyítsuk be, hogy akkor a táblázatban található számok összege nem nagyobb, mint $n\sqrt{n}$.