Kezdők (legfeljebb I. osztályosok) I. forduló

1. Bizonyítsuk be, hogy bármely három különböző a, b, c számra teljesül az

$$\frac{(a-1)^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{(b-1)^2}{(b-a)(b-c)}+\frac{(c-1)^2}{(c-a)(c-b)}=1.$$

egyenlőség.

2. Az AB szakasz felezőmerőlegesének tetszőleges pontja C, az AB egyenes tetszőleges pontja D (azonban C mégse essék az AB felezőpontjára, és D ne essék egybe se A-val, se B-vel). Bizonyítandó, hogy az ACD és BCD háromszögek köré írt körök sugarai egyenlők.

3. András és Ferenc egy AB szakasz hosszát becsléssel állapítja meg. Ha András 10%-kal kevesebbre becsüli, úgy eltalálja a pontos értéket. Ha Ferenc becslése 10%-kal több lenne, akkor ő is eltalálná a pontos értéket.
A két becslés melyikénél lesz a hiba abszolút értéke kisebb?

4. Mutassuk meg, hogy bármely, 7-nél nagyobb n természetes szám előállítható $n=3x+5y$ alakban, ahol x és y nem negatív egész számok.

5. A, B és C egy r sugarú kör három olyan különböző pontja, hogy közöttük nincs átellenes. Rajzoljunk az AB, BC és CA szakaszokra, mint alapokra ABC', BCA' és CAB' egyenlő szárú háromszögeket úgy, hogy száraik hossza r legyen, és A', B', C' pontok különbözzenek a kör középpontjától. Igazoljuk, hogy $A'B'C'$ háromszög egybevágó az ABC háromszöggel.

6. Adott a síkban egy O középpontú kör. Két átmérőjének végpontjai A, B, ill. C, D. Határozzuk meg a kör síkjában azoknak a P pontoknak a mértani helyét, amelyekre a PO távolság a PA, PB, PC és PD távolságok mindegyikénél kisebb.

7. Mutassuk meg, hogy ha az $ABCD$ konvex négyszögben érvényes az $AB+BD\leq AC+CD$ egyenlőtlenség, akkor $AB<AC$ egyenlőtlenség is teljesül.

8. Keressük meg azokat a páratlan k egész számokat, amelyekre a $k(k+2)(k+4)(k+6)$ szorzat valamely természetes szám négyzetével egyenlő.

Kezdők, II. forduló

Általános tantervű osztályok feladatai

1. Az $ABCD$ húrnégyszög AB és CD oldalai párhuzamosak, de nem egyenlő hosszúak. Az A csúcson átmenő és a BC oldallal párhuzamos egyenes a négyszög körülírt körét az E pontban metszi. Az AB és DE egyenesek metszéspontja F. Az F-en átmenő és BC-vel párhuzamos egyenes a DC egyenest a G pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy a GA egyenes érinti a kört.

2. Az a és b természetes számok különbsége osztható 2^7-nel, de 2^8-nal már nem osztható. Mi az a legnagyobb n kitevő, amelyre 2^n osztója az a^3-b^3 különbségnek?

3. Egy négyzetet felosztunk 7 sorra és 7 oszlopra, a mezőkbe tetszőleges elrendezésben beírjuk az $1, 2, 3, \ldots, 48, 49$ természetes számokat, mindegyikbe egyet. Két osztóvonal közös pontját csomónak nevezzük, és odaírjuk hozzá annak a négy számnak az összegét, amely a csomót körülfogja. (A négyzet kerületén nincsenek csomók.) Mutassuk meg, hogy számaink bármely elrendezése mellett van legalább 3 olyan csomó, ahova legalább 75-öt írtunk.

Matematika I. tantervű osztályok feladatai

1. Egy kör középpontja O, két pontja A és B. Az ezekben megrajzolt érintőket a kör egy harmadik érintője a C, illetve a D pontban metszi. Jelöljük C-nek az OD egyenesen levő merőleges vetületét E-vel. Bizonyítsuk be, hogy E rajta van az AB egyenesen!

2. Az a_1, a_2, $\ldots$, a_n egész számokról azt tudjuk, hogy mindegyiküknek a négyzete is szerepel köztük. Legfeljebb mekkora lehet az n?

3. Megegyezik az általános tantervű osztályok 3. feladatával.

Matematika II. tantervű osztályok feladatai

1. Adott az $ABCD$ konvex négyszög és a belsejében egy E pont. Határozzuk meg azon P pontok mértani helyét a négyszög belsejében, amelyekre a PAB és PCD háromszögek területének összege egyenlő az EAB és ECD háromszögek területének összegével.

2. Tekintsük az $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ függvényt (ahol c és d közül legalább az egyik nem 0).

Mutassuk meg, hogy ha $f\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)$ állandó, akkor az $f(x)$ is állandó!

3. Igazoljuk, hogy ha a, b, c, d természetes számokra teljesül az $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}=1$ egyenlőség, akkor ezek a számok legfeljebb négyjegyűek!

Haladók (legfeljebb II. osztályosok), I. forduló

1. Bizonyítsuk be, hogy van végtelen sok szomszédos számokból álló számpár úgy, hogy mindkét tagnak van négyzetszám osztója.

2. Az ABC derékszögű háromszögben $BAC\sphericalangle=30^\circ$. Jelöljük a háromszögbe írható kör középpontját S-sel, az AB átfogó felezőpontját D-vel. Igazoljuk, hogy $CS=DS$!

3. Igazoljuk, hogy bármely háromszögnek van olyan S belső pontja, amely tetszőleges rajta áthaladó egyenes háromszögbe eső darabját úgy osztja két részre, hogy egyik rész sem hosszabb a másik kétszeresénél.

4. Az ABC háromszögben meghúzzuk a CC_1 súlyvonalat, ennek felezőpontja D. Az AD egyenes BC-t E-ben metszi. Legyen az ABC háromszög területe t területegység. Fejezzük ki t-vel a keletkezett ACD, AC_1D, CDE és BC_1DE síkidomok területét!

5. Igazoljuk, hogy egy derékszögű háromszögben a hegyesszögek csúcsaiból kiinduló súlyvonalak négyzete összegének és a háromszögbe írt kör sugara négyzetének hányadosa nem kisebb 20-nál!

6. Milyen – az $a_1,\ a_2,\ \ldots,1a_m$ és $b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n$ számokra vonatkozó – feltétel mellett tölthető ki egy m sorból és n oszlopból álló táblázat úgy, hogy a táblázat i-edik sorában álló számok összege a_i legyen $(i=1,\ \ldots,\ m)$, a j-edik oszlopban álló számok összege b_j legyen $(j=1,\ \ldots,\ n)$?

7. Igazoljuk, hogy tetszőleges $k\geq 0$ egész esetén $(k-1)\cdot k-1$ a legnagyobb olyan egész szám, amely nem állítható elő $m_0k+m_1(k+1)$ alakban, ahol $m_1\geq 0$, $m_0\geq 0$ egészek.

8. Egy természetes számot tökéletes számnak nevezünk, ha a szám egyenlő a nála kisebb pozitív osztóinak összegével. (Például 6 tökéletes szám, mert $6=1+2+3$.) Bizonyítsuk be, hogy ha n 4-gyel osztva 3 maradékot ad, akkor nem tökéletes szám.

Haladók, II. forduló

Általános tantervű osztályok feladatai

1. A hatjegyű számok közül azok vannak-e többen, melyek előállnak két háromjegyű szám szorzataként, vagy azok, amelyek nem állnak elő?

2. Egy konvex négyszög oldalainak hossza (sorrendben) a, b, c, d. Igazoljuk, hogy az oldalak felező pontjai által meghatározott négyszög akkor és csak akkor téglalap, ha $a^2+c^2=b^2+d^2$.

3. Bizonyítsuk be, hogy 39 egymás utáni természetes szám között mindig van olyan, amelyben a számjegyek összege osztható 11-gyel!

Matematika I. tagozatos osztályok feladatai

1. Az $ABCD$ téglalap csúcsai köré r_A, r_B, r_C, r_D sugárral egymást nem metsző köröket rajzoltunk.
Húzzuk meg az A és C köré írt körök közös külső érintőit, hasonlóképpen a B és D köré írt körök közös külső érintőit. Bizonyítsuk be, hogy ha $r_A+r_C=r_B+r_D$, akkor e négy egyenes érintőnégyszöget zár közre!

2. Igazoljuk, hogy végtelen sok köbszám kezdődik 1979-cel!

3. Megegyezik az általános tantervű osztályok 3. feladatával.

Matematika II. tagozatos osztályok feladatai

1. Az $ABCD$ paralelogramma csúcsai köré r_A, r_B, r_C, r_D sugárral egymást nem metsző köröket rajzoltunk. Húzzuk meg az A és C köré írt körök közös külső érintőit, hasonlóképpen a B és D köré írt körök közös külső érintőit. Bizonyítsuk be, hogy ha $r_A+r_C=r_B+r_D$, akkor e négy egyenes érintőnégyszöget zár közre!

2. A 0,14916253649... végtelen tizedes törtet a négyzetszámok egymás mellé írásával készítettük. Bizonyítsuk be, hogy a 2378 számjegycsoport végtelen sokszor előfordul benne!

3. Jelölje $\{x\}$ az x pozitív szám törtrészét (azaz x és a legnagyobb, x-et meg nem haladó egész szám különbségét). Határozzuk meg az

$$\left\{\frac{1979\cdot 1+16}{111}\right\}+\left\{\frac{1979\cdot 2+16}{111}\right\}+\ldots+\left\{\frac{1979\cdot 110+16}{111}\right\}+\left\{\frac{1979\cdot 111+16}{111}\right\}$$

összeg értékét!