

A 2194. feladatban azt kellett igazolni, hogy tetszőleges a, b, c valós számra az

$$(1) \quad f(x) = a \sin x + b \sin 2x + c \sin 4x$$

függvény értéke valamely x_0 helyen legalább $\frac{1}{2}(|a| + |b| + |c|)$. A megoldás (lásd a novemberi számunk 125. oldalán) azt sugallja, hogy az $1/2$ nem a lehető legjobb konstans, azaz van olyan $\lambda > 0,5$ szám is, hogy

$$f(x_0) \geq \lambda \cdot (|a| + |b| + |c|)$$

is teljesül valamely x_0 -ra tetszőleges a, b, c mellett. Jelöljük λ_0 -al az ilyen tulajdonságú λ -k maximumát. (Ez a maximum létezik.) A cikkben λ_0 értékét fogjuk meghatározni.

Az (1) alatti $f(x)$ periodikus függvény (2π biztosan periódusa), továbbá folytonos, ezért felveszi maximumát. A 2194. feladat állítása tehát ekvivalens azzal, hogy a

$$(2) \quad g_{a,b,c}(x) = \frac{f(x)}{|a| + |b| + |c|} = \frac{a \sin x + b \sin 2x + c \sin 4x}{|a| + |b| + |c|}$$

függvény x szerinti maximuma legalább $0,5$ tetszőleges a, b, c számra. (Az $|a| + |b| + |c| = 0$ esetet, vagyis amikor $a = b = c = 0$, most és a továbbiakban kizárjuk.) Jelöljük $g_{a,b,c}(x)$ maximumát, ami az előbbieket szerint létezik, és a, b és c -től függ, $h(a, b, c)$ -vel. Ezekkel a jelölésekkel λ_0 a legnagyobb olyan szám, amelyre

$$h(a, b, c) \geq \lambda_0$$

minden a, b, c -re, azaz más jelöléssel

$$\lambda_0 = \inf_{a,b,c} h(a, b, c).$$

Igazak a következő állítások:

- a) ha $\lambda > 0$ tetszőleges szám, akkor $h(\lambda a, \lambda b, \lambda c) = h(a, b, c)$;
- b) $h(a, b, c) = h(-a, -b, -c) = h(-a, b, c)$;
- c) $h(a, b, c) > 0,5877$, sőt ha b és c különböző előjelűek, akkor $h(a, b, c) \geq \sqrt{3}/2$.

Az a) állítás abból következik, hogy $g(x)$ értéke nem változik, ha benne a, b, c helyébe rendre $\lambda a, \lambda b, \lambda c$ -t teszünk.

b) igazolásához tegyük fel, hogy $g_{a,b,c}(x)$ maximumát x_0 -nál (is) felveszi, azaz

$$g_{a,b,c}(x) \leq g_{a,b,c}(x_0) = h(a, b, c)$$

tetszőleges x -re. Könnyen ellenőrizhető (2) alapján, hogy

$$\begin{aligned} g_{-a,-b,-c}(x) &= g_{a,b,c}(-x) \\ g_{-a,b,c}(x) &= g_{a,b,c}(x - \pi), \end{aligned}$$

így tetszőleges x -re

$$g_{-a,-b,-c}(x) = g_{a,b,c}(-x) \leq g_{a,b,c}(x_0),$$

és egyenlőség áll $x = -x_0$ esetén, ami igazolja a $h(-a, -b, -c) = h(a, b, c)$ összefüggést. Hasonlóan

$$g_{-a,b,c}(x) = g_{a,b,c}(x - \pi) \leq g_{a,b,c}(x_0),$$

és egyenlőség áll $x = x_0 + \pi$ esetén, ami b) másik felét adja.

Az a) és b) állítások alapján h értékészletének vizsgálatához elegendő az olyan a, b, c számhármassokra szorítkoznunk, amelyeknél $|a| + |b| + |c| = 1$ és $a \geq 0, b \geq 0$. A továbbiakban ezt mindig feltesszük.

Ha b és c különböző előjelűek, akkor b) alapján feltehetjük, hogy $a \geq 0, b > 0, c < 0$ és ekkor

$$h(a, b, c) \geq g_{a,b,c}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + b \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + c \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{a + b - c} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

ha pedig b és c egyező előjelűek, akkor $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ és

$$h(a, b, c) \geq g_{a,b,c}\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{a \sin \frac{\pi}{5} + b \sin \frac{2\pi}{5} + c \sin \frac{4\pi}{5}}{a + b + c} \geq \sin \frac{\pi}{5} > 0,5877,$$

hiszen

$$\sin \frac{\pi}{5} = \sin \frac{4\pi}{5} = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}} \quad \text{és} \quad \sin \frac{2\pi}{5} = \sin \frac{\pi}{5} \cdot \frac{\sqrt{5} + 1}{2} > \sin \frac{\pi}{5}.$$

Ezzel a 2194. feladat állításánál, miszerint $\lambda_0 \geq 0,5$, többet is igazoltunk, nevezetesen azt, hogy $\lambda_0 > 0,5877$.

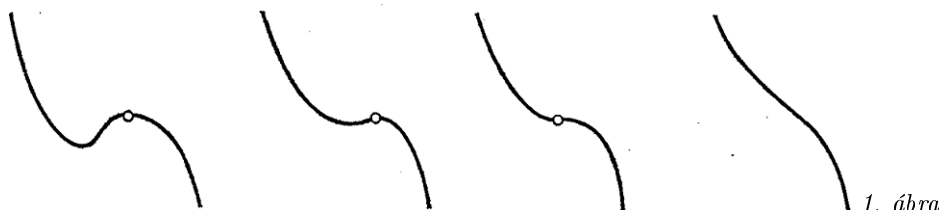
Abból, hogy $h(1, 0, 0) = h(0, 1, 0) = h(0, 0, 1) = 1$, azonnal következik $\lambda_0 \leq 1$. Hogy λ_0 -ra egy kicsit jobb felső becslést kapjunk, tekintsük a

$$(3) \quad 4 \sin x + 2 \sin 2x + \sin 4x$$

függvényt. Állítjuk, hogy ennek értéke legfeljebb 6, azaz

$$h\left(\frac{4}{7}, \frac{2}{7}, \frac{1}{7}\right) \leq \frac{6}{7}, \quad \text{amiből} \quad \lambda_0 \leq \frac{6}{7} < \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Valóban, ha egy x értékre $\sin x$, $\sin 2x$ és $\sin 4x$ nem mind pozitív, (3) értéke legfeljebb $4 + 2 = 6$. Ha pedig mind pozitív, akkor $2k\pi \leq x \leq 2k\pi + \frac{\pi}{4}$ valamilyen k egész számra, de ekkor $\sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, azaz (3) értéke nem több, mint $2\sqrt{2} + 2 + 1 < 6$, ahogyan állítottuk.



A c) állítás értelmében $h(a, b, c) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ ha b és c különböző előjelű, most pedig azt kaptuk, hogy $\lambda_0 < \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ez azt jelenti – az a) és b) állításokkal együtt –, hogy λ_0 meghatározásához *elegendő az $a + b + c = 1$, $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$ feltételeknek elegendő számhármassokat vizsgálni*.

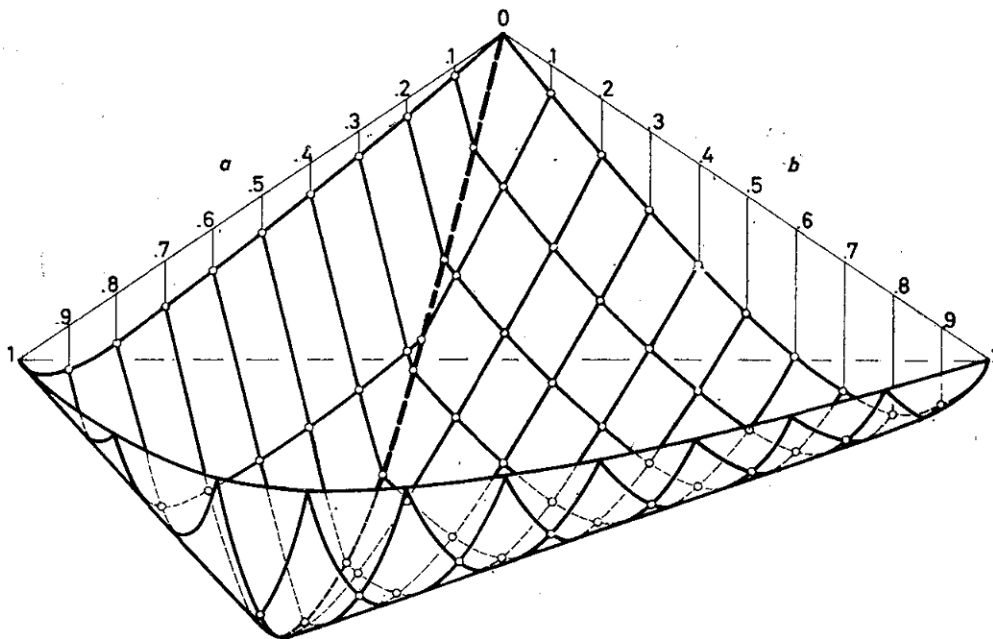
Térjünk vissza a (2) alatt definiált $g_{a,b,c}$ függvényhez, melynek alakja a fenti feltételek mellett

$$(4) \quad g_{a,b,c}(x) = a \sin x + b \sin 2x + c \sin 4x.$$

Ennek a függvénynek a $[0, 2\pi)$ intervallumban (általában) 4 lokális maximuma van, és e négy helyen felvett érték maximuma adja meg $h(a, b, c)$ értékét. Most ha a, b, c értékét folyamatosan változtatjuk, akkor a (4) függvény lokális maximumhelyei, valamint az ott felvett értékek is a, b, c -vel együtt folytonosan, sőt differenciálható módon változnak. Azonban egy furcsa jelenségnek is szemtanúi lehetünk: lokális maximumok keletkeznek és eltűnnek. Egy lokális maximum eltűnését szemlélteti az 1. ábra. Ahogyan a paraméterek változnak (esetünkben a, b és c), a maximumhely egyre közelebb kerül egy inflexiós ponthoz, majd mikor összeérnek, a maximum eltűnik. Így ha egy síkbeli koordináta-rendszer (a, b) koordinátájú pontja fölé a térben a $g_{a,b,1-a-b}(x)$ függvény lokális maximumainak értékeit felrajzoljuk, „sima” felületeket kapunk. A felületek metszik is egymást, ilyenkor $g(x)$ függvénynek két vagy több egyforma értékű lokális maximuma van. Az abszolút maximumot mindig a legfelső pont képviseli, így ezek a pontok, azaz $h(a, b, 1 - a - b)$ értékei olyan felületet alkotnak, amely törésvonalak mentén összekapcsolt „sima” felületdarabokból áll.

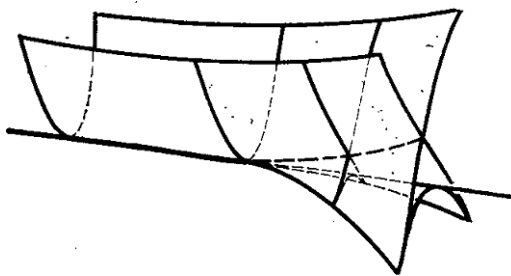
Ez a megfontolás mutatja, hogy a $H(a, b) = h(a, b, 1 - a - b)$ kétváltozós függvény folytonos, de nem minden pontban deriválható (éppen a törésvonalak mentén nem). S mivel folytonos függvény korlátos zárt tartományon felveszi minimumát, azért

$$\lambda_0 = \min_{\substack{a \geq 0, b \geq 0 \\ a+b=1}} H(a, b).$$



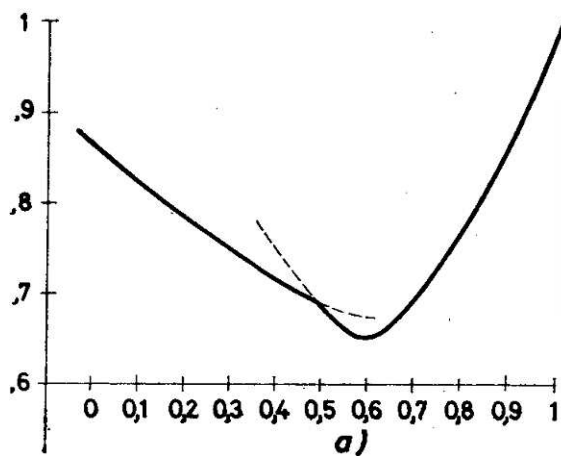
2. ábra

Így feladatunk $H(a, b)$ minimumának meghatározása. Ezt a felületet mutatja a 2. ábra. A felső háromszöglap (amire az a és b értékeit mutató számok is kerültek) 1 magasságban van. Látható, hogy két sima felület kapcsolódik egymáshoz a szaggatotttal jelölt törésvonal mentén. Azonban azokra az értékekre, amelyeknél $(a + b)$ 1-hez közel van, a két felületrész egymásba simul, a törésvonal eltűnik.

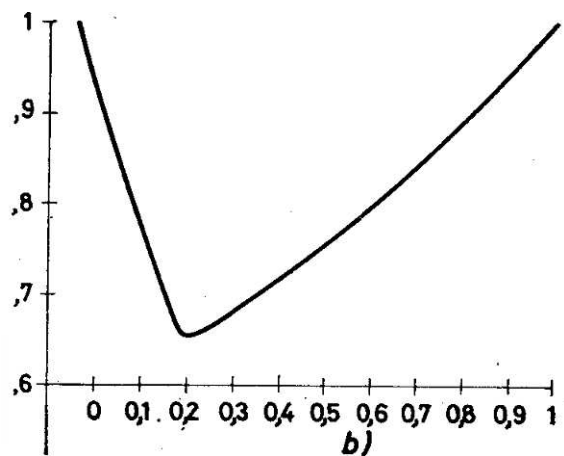


3. ábra

Ebben a pontban a felületnek ún. *szingularitása* van, a felület tulajdonságai hirtelen, ugrásszerűen megváltoznak. A felületek viselkedését ilyen szinguláris pont környezetében a *katasztrófaelmélet* vizsgálja. Ha nemcsak az abszolút maximumot, hanem az összes lokális szélsőértéket is berajzoljuk az ábrába, a szinguláris pont környezete (kicsit más nézőpontból) a 3. ábrán láthatóhoz hasonló. A törésvonalat itt is vastag szaggatott vonallal húztuk ki. A felülettípus neve: *fecskefarok*.

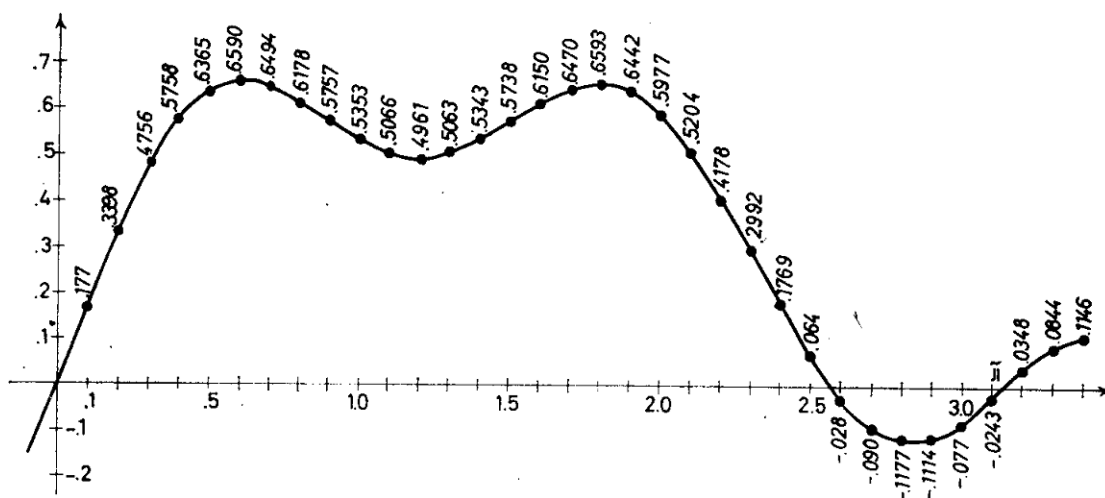


4. ábra



5. ábra

A 4. ábrán az x -tengelyen a értékeit mértük fel, az y -tengelyen pedig rögzített a mellett a $0 \leq b \leq 1 - a$ értékekre $H(a, b)$ minimumát (azaz a 2. ábra b tengellyel párhuzamos szintvonalain a legalacsonyabban fekvő pont magasságát). A 0,5-nél levő töréspont azt jelzi, hogy ez a minimumhely a sima felületről átkerült a törésvonalra. Hasonlóan az 5. ábrán rögzített b mellett készítettük el a minimumot. Az ábrákról leolvasható, hogy $\lambda \approx 0,65$ és ezt az értéket az $a_0 \approx 0,6$, $b_0 \approx 0,2$ értékeknél veszi fel. Pontosabb számítások azt mutatják, hogy $\lambda_0 = 0,659\,420$, $a_0 = 0,6040$, $b_0 = 0,1966$. Az ezekhez az értékekhez tartozó $g(x)$ függvény képét láthatjuk a 6. ábra.



6. ábra