

1. feladat Legyenek a, b racionális számok. Bizonyítsuk be, hogy ha az

$$(1) \quad ax^2 + by^2 = 1$$

egyenletnek van racionális x, y számokból álló megoldása, akkor végtelen sok racionális számokból álló megoldása van.

A következő szemléletes megfontolás adhat ötletet a megoldáshoz: (1) egy ellipszis vagy hiperbola egyenlete, és feltétel szerint van rajta egy racionális koordinátájú pont. Húzzunk ezen át racionális meredekségű egyenest. Az ezzel való további metszéspont megkeresése egy racionális együtthatós, másodfokú egyenletre vezet, amelyiknek egyik gyöke racionális szám, tehát a másiknak is annak kell lennie. Ennek az alapgondolatnak a keresztülvitele a következő megoldás.

Megoldás. Legyen x_0, y_0 olyan racionális számpár, amelyre

$$(2) \quad ax_0^2 + by_0^2 = 1,$$

és keressünk egy olyan további x, y megoldást, amelyre teljesül az

$$(3) \quad y = y_0 + m(x - x_0)$$

összefüggés egy adott m racionális számmal. Behelyettesítve ezt (1) két oldalának a különbségébe, azt (2) felhasználásával a következőképpen alakíthatjuk át:

$$\begin{aligned} ax^2 + by_0^2 - 1 + 2by_0m(x - x_0) + bm^2(x - x_0)^2 &= \\ &= (x - x_0)(a(x + x_0) + 2bm y_0 + bm^2(x - x_0)) = \\ &= (x - x_0)((a + bm^2)x + 2bm y_0 + (a - bm^2)x_0). \end{aligned}$$

Ennek 0-helye az első tényező eltűnéséből adódó x_0 -on kívül, továbbá a hozzá tartozó y érték, amennyiben $a + bm^2 \neq 0$,

$$x = \frac{bm^2 - a}{bm^2 + a}x_0 - \frac{2bm}{bm^2 + a}y_0, \quad y = \frac{-2am}{bm^2 + a}x_0 - \frac{bm^2 - a}{bm^2 + a}y_0.$$

Az átalakításokat fordított irányban végezve adódik, hogy x és y közt fennáll (3), és hogy kielégítik az (1) egyenletet.

Be kell még látnunk, hogy ilyen módon végtelen sok megoldást kapunk, de ez nyilvánvaló. Legyen két különböző racionális m_1 és m_2 értékhez tartozó megoldás (x_1, y_1) és (x_2, y_2) . Ha $x_1 \neq x_2$, akkor két különböző megoldást kaptunk, ha pedig $x_1 = x_2$, akkor (3)-ból látható, hogy $y_1 \neq y_2$.

Megjegyzések. 1. Megfontolásaink akkor is helyesek, ha a és b valamelyike, pl. $b = 0$. Ekkor nyilván $a > 0$, és formuláink azt adják, hogy $x = -x_0$, $y = y_0 - 2mx_0$. Ez utóbbi minden racionális számot felvesz értékül, ha m végigfut a racionális számokon, és esetünkben minden ilyen számpár megoldás is (ugyanígy az összes (x_0, y) számpárok is).

2. Sok más megfontolás is elvezet végtelen sok megoldás megtalálásához. Képezzük pl. (1) és (2) megfelelő oldalainak a különbségét:

$$a(x - x_0)(x + x_0) + b(y - y_0)(y + y_0) = 0.$$

Ha itt pl. $b \neq 0$, és olyan megoldást keresünk, amelyre $y \neq -y_0$, akkor alkalmas t racionális számmal $x - x_0 = b(y + y_0)t$ alakban írható. Ekkor $y - y_0 = -a(x + x_0)t$ és a kettőből kifejezve x -et és y -t

$$\begin{aligned} x &= \frac{1 - abt^2}{1 + abt^2}x_0 + \frac{2bt}{1 + abt^2}y_0, \\ y &= -\frac{2at}{1 + abt^2}x_0 + \frac{1 - abt^2}{1 + abt^2}y_0. \end{aligned}$$

Nem nehéz belátni, hogy ezek minden t értékre kielégítik (1)-et, és végtelen sok számpárt állítanak elő, hiszen pl. egy x értéket csak két t érték mellett kaphatunk.

Bár az alapgondolat és a számolás különbözött a megoldásban követettől, a megoldás mégsem különbözik lényegesen, hiszen az $(x - x_0)$ -ra felírt összefüggés az $1/bt$ meredekségű és az $(x_0, -y_0)$ ponton – amelyik rajta van a görbén – átmenő egyenes egyenlete.

3. Egy versenyző észrevette az

$$(ax^2 + by^2)(u^2 + av^2) = a(xu + byv)^2 + b(axv - yu)^2$$

azonosságot. Ennek felhasználásával (2)-ből (1) végtelen sok megoldását nyerjük, ha találunk az

$$u^2 + av^2 = 1$$

egyenletnek végtelen sok racionális számpároból álló megoldását. Ez nem nehéz az

$$abv^2 = (1 - u)(1 + u)$$

átalakítás alapján. Keressük az $1 - u$ tényezőt vw alakban, akkor $1 + u = abv/w$. A kettőből kifejezve u -t és v -t, azonosságunk alapján (1) megoldásait

$$x = \frac{ab - w^2}{ab + w^2}x_0 + \frac{2bw}{ab + w^2}y_0, \quad y = \frac{2aw}{ab + w^2}x_0 - \frac{ab - w^2}{ab + w^2}y_0$$

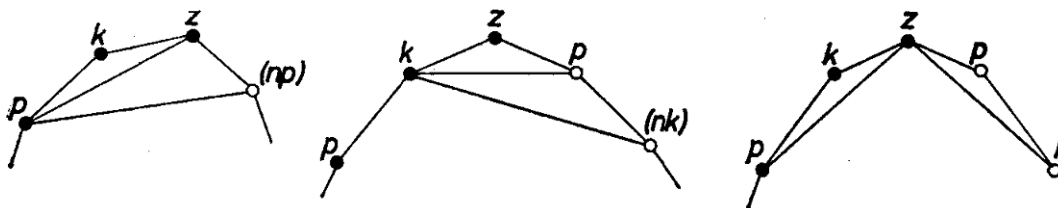
alakban kapjuk. Ezen az úton eleve világos, hogy ezek (1) megoldásai, és könnyen látható ismét, hogy végtelen sok különböző megoldást kapunk.

Itt a meg gondolásból nem nyilvánvaló, hogy minden megoldást megkaptunk, de könnyen látható, hogy a feladatra közölt megoldásban egy tetszés szerinti $m \neq 0$ értékhez tartozó (x, y) számpárt megkapunk, és pedig $w = a/m$ paraméterértéknél, tehát lényegében minden megoldás kiadódik.

2. feladat. Egy páratlan oldalú konvex sokszög csúcsai úgy vannak kiszínezve, hogy a szomszédos csúcsok különböző színűek. Bizonyítsuk be, hogy a sokszög háromszögekre bontható olyan egymást nem metsző átlókkal, amelyeknek végpontjai különböző színűek.

I. megoldás. Páratlan oldalú sokszög csúcsainak kívánt módon történő színezéséhez legalább három szín szükséges. Legyen ugyanis egy csúcs mondjuk piros, a következő kék. Ekkor tovább felváltva következik piros és kék csúcs, amíg egy harmadik szín fel nem lép. Ennek be kell következnie, mert különben páratlan számú csúcs esetén az utolsó csúcs is piros volna, meg a vele szomszédos első is.

Ezután eljárást adunk meg az átlók meghúzására. Mikor először jutunk harmadik színű csúcshoz, az az öt megelőző kettővel három szomszédos, különböző színű csúcs, mondjuk piros, kék és zöld. Ha a következő csúcs nem piros, akkor ezt a csúcsot s a zöldet összekötjük a pirossal. Ha a negyedik csúcs újra piros, de az ötödik nem kék, akkor a kék csúcsot kötjük össze a negyedikkel és az ötödikkel. Ha végül a negyedik csúcs piros, az ötödik kék, akkor a zöld csúcsot kötjük össze az elsővel és az ötödikkel. Mindhárom esetben két háromszöget vágnak le az átlók a sokszögről, és visszamarad egy kettővel kevesebb – tehát újra páratlan oldalszámú – sokszög, amelyiknek szomszédos csúcsai különböző színűek. Így az eljárás folytatható. A továbbiakban meghúzandó átlók nem metszhetik a korábbiakat, mivel a sokszög konvex volta miatt azok az újabb sokszögon kívül haladnak vagy annak oldalai. Véges számú lépés után egy háromszög marad vissza, vagyis elérjük, hogy a sokszög háromszögekre van osztva a feladatban kívánt módon.



1. ábra

Megjegyzés. Az eljárást teljes indukciós bizonyításként is megfogalmazhattuk volna.

Többen észrevették, hogy az oldalszám páratlan volta csak annak biztosítására kellett, hogy a csúcsok legalább három színnel vannak színezve. Ezt mutatja a következő megoldás.

II. megoldás. Bebizonyítjuk, hogy a feladat állítása igaz minden olyan konvex sokszögre, amelyiknek a csúcsai legalább három színnel vannak megszínezve úgy, hogy a szomszédos csúcsok különböző színűek.

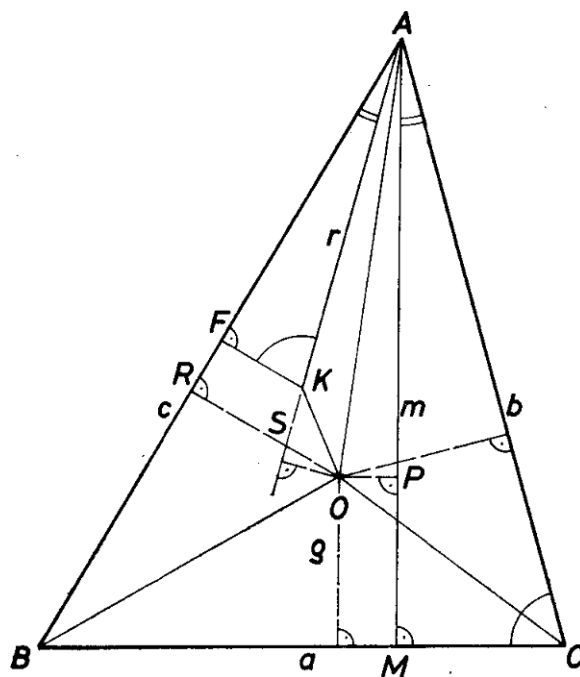
Ha van az összes többiből különböző színű csúcs, akkor egy ilyenből húzzuk meg az összes átlót és kapunk egy kívánt felbontást.

Ha minden színnel legalább két csúcs van színezve, akkor egy csúcsból elindulva nézzük az egymás utáni csúcsok színét, míg csak három különböző szín fel nem lép. Ekkor a harmadik színű csúcsot kössük össze a kettővel előtte levővel. Az átló különböző színű csúcsokat köt össze. Az általa lemetezett csúccsal maradt egyező színű a keletkezett eggyel kevesebb oldalú sokszögben, így az ugyanannyi színnel van színezve, mint az eredeti, tehát legalább hárommal, végül konvex, tehát egyetlen átlója sem metszheti a már meghúzott átlót. Ha tehát az eljárást ismételjük, véges számú lépésben eljutunk egy kívánt felbontáshoz. Ezzel bizonyítottuk állításunkat.

Ha egy sokszög csúcsai két színnel vannak a kívánt módon színezve, akkor a csúcsok felváltva egyik és másik színűek, tehát mindegyik színű csúcsból ugyanannyi van, így a csúcsok száma páros. Páratlan oldalú sokszög színezéséhez tehát legalább három színre van szükség, arra tehát vonatkozik a bizonyított tétel.

3. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszögnek nincs tompaszöge, akkor a legnagyobb magasság legalább akkora, mint a köré írt kör sugarának és a beírt kör sugarának az összege. Milyen háromszögek esetén áll fenn egyenlőség?

I. megoldás. A legkisebb oldalra bocsátott magasság a legnagyobb, mivel az oldal és a rábocsátott magasság szorzata a háromszög területének a kétszeresét adja. Legyen az ABC háromszög legkisebb oldala vagy a legkisebbek egyike a $BC = a$ oldal, a rábocsátott magasság $AM = m$ (2. ábra).



2. ábra

A háromszög A -nál levő belső szöge nem nagyobb a másik két belső szögnél, mert a háromszögben kisebb oldallal szemben fekvő szög kisebb.

A háromszögbe írt kör O középpontja a belső szögfelezők metszéspontja. Bocsássunk belőle merőlegest az oldalakra és m -re, az utóbbi talppontja legyen P . Ekkor PM egyenlő a beírt kör sugarával. Azt kell tehát megmutatnunk, hogy AP legalább akkora, mint a háromszög köré írt kör sugara.

A körülírt kör K középpontja az A -ból induló háromszögoldalak és az O -ból rájuk bocsátott merőlegesek határolta négyszög pontja. Valóban, egyrészt nem lehet K az ABC háromszögön kívül, mert a háromszög nem tompaszögű. Másrészt az ABO és ACO háromszög A -nál levő szöge nem nagyobb a B -nél, ill. C -nél levő szögnél, így AO vetülete nem kisebb, mint OB -é, ill. OC -é a harmadik oldalon. Ez más szóval azt jelenti, hogy az említett négyszög határához tartozik az AB és AC oldal felezőpontja is; így az ezekben emelt merőlegesek metszéspontja, vagyis K is a négyszöghöz tartozik.

Jelöljük AB felezőpontját F -fel, O vetületét AB -n R -rel. A betűzés megfelelő választásával feltehetjük, hogy az AOR háromszög tartalmazza K -t. Az $AKF < A$ háromszög köré írt kör ACB kerületi szögéhez tartozó középponti szög fele és így egyenlő vele, ha $K \neq F$. Ekkor viszont

$$\angle FAK < \angle MAC,$$

s így AO felezi a KAM szöget is. Ez akkor is igaz, ha $K = F$, mert ekkor $ACB <$ derékszög, s így $M = C$.

Megállapításunkból az következik, hogy a körülírt kör AK sugarának AO -ra vonatkozó tükörképe AM -re esik. Megmutatjuk még, hogy az $AKO <$ tompaszög, ha K különbözik O -tól és R -től. Ebből következik, hogy K tükörképe az AP szakaszra esik, tehát

$$AK < AP,$$

amint állítottuk.

Jelöljük S -sel az AK meghosszabbításának metszéspontját OR -rel, ekkor

$$\angle AKO \geq \angle ASO \geq \angle ARO = 90^\circ,$$

mint a KSO , ill. ARS háromszög külső szöge, és mind a két helyen csak akkor állhat egyenlőség, ha K , S és R egybeesik. Ebben az esetben F is egybeesik ezekkel a pontokkal. Ekkor az ABC háromszög derékszögű C -nél és egyenlő szárú. Így K tükörképe AO -ra P , tehát m a két körsugár összegével egyenlő.

Ha végül K és O egybeesik, akkor a háromszög szabályos. Ebben az esetben is nyilván egyenlőség áll fenn.

Jegyzet. Az ábra alapján könnyen nyerhetünk két összefüggést, amelyeket a következő megoldásban felhasználunk.

1. Az ábrán látható jelöléseket használjuk. Az ACM és az AKF derékszögű háromszögek hasonlóak, mert – mint láttuk – C -nél, ill. K -nál levő szögük egyenlő. Ebből következik az oldalak arányára a

$$\frac{b}{m} = \frac{r}{c/2}$$

egyenlőség. Mindkét oldalt megszorozva acm -mel, azt kapjuk, hogy

$$abc = 2amr = 4tr,$$

ahol t a háromszög területét jelenti.

2. Fejezzük ki m^2 -et az ACM és ABM derékszögű háromszögből:

$$m^2 = b^2 - CM^2 = c^2 - (a - CM)^2.$$

A második egyenlőségből

$$2aCM = a^2 + b^2 - c^2.$$

Az első egyenlőséget $4a^2$ -tel megszorozva a bal oldalon $16t^2$ keletkezik. A jobb oldalon felhasználjuk az éppen nyert összefüggést és azután szorzattá alakítunk:

$$\begin{aligned} 16t^2 &= 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 = (2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2) = \\ &= [(a + b)^2 - c^2][c^2 - (a - b)^2] = (a + b + c)(a + b - c)(c - a + b)(c + a - b). \end{aligned}$$

A terület felét s -sel jelölve, ezt így írhatjuk:

$$t^2 = s(s - a)(s - b)(s - c).$$

Ez a Heron-formula néven ismert területképlet.

II. megoldás. Az eddigi jelöléseket használjuk, a háromszögbe írt kör sugarát ϱ -val jelöljük. Feltéhetjük, hogy

$$a \leq b \leq c.$$

Ekkor az $m - \varrho - r$ különbségről kell megmutatnunk, hogy nem negatív, és megállapítani, milyen esetekben 0. A szereplő adatokat az oldalakkal és a területtel fejezzük ki. Ismeretes, hogy $t = \varrho s$, így

$$m - \varrho = \frac{2t}{a} - \frac{t}{s} = \frac{t(b + c)}{as} = \frac{(s - a)(s - b)(s - c)(b + c)}{at}.$$

Az utolsó lépésben bővítettünk t -vel, felhasználtuk Heron képletét (lásd a fenti 2. jegyzetet), és egyszerűsítettünk s -sel. Ebből levonjuk még az $r = abc/4t$ értéket (lásd a fenti 1. jegyzetet), és bővítünk 2-vel:

$$\begin{aligned} m - \varrho - r &= \frac{4(s - a)(s - b)(s - c)(b + c) - a^2bc}{4at} = \\ &= \frac{(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)(b + c) - 2a^2bc}{8at}. \end{aligned}$$

A számlálóról be kell látnunk, hogy nem lehet negatív. A kisebbítendő középső két tényezőjének a szorzata $a^2 - (c - b)^2$. A másik két tényező szorzatának a^2 -szereséből a kivonandót is levonva a számláló így alakítható tovább, az első tagból levonva, a másodikhoz hozzáadva $a^2(c - b)(c + b - a)$ -t:

$$\begin{aligned} (4) \quad & a^2(b^2 + c^2 - a(b + c)) - (c^2 - b^2)(c - b)(b + c - a) = \\ &= a^2[b^2 + c^2 - a(b + c) - (c^2 - b^2 - a(c - b))] + (a^2 + b^2 - c^2)(c - b)(b + c - a) = \\ &= 2a^2b(b - a) + (a^2 + b^2 - c^2)(c - b)(b + c - a). \end{aligned}$$

Itt az oldalak nagyságrendjére tett feltevés szerint sem az első tag utolsó tényezője, sem a második második tényezője nem lehet negatív. A második tag első tényezője C -nél derékszögű háromszögre 0, hegyesszögű háromszögre pedig pozitív; ugyanis ha két háromszög két oldalpárja egyenlő, akkor a harmadik oldal abban a háromszögben kisebb, amelyikben az egyenlő oldalak közti szög kisebb. A többi tényező pozitív. Ezzel beláttuk, hogy $m - \varrho - r \geq 0$.

Csak úgy lehet 0 a kifejezés, ha a (4) utolsó alakjában mind a két tag 0. Ehhez egyrészt $a = b$ kell hogy legyen, másrészt vagy $b = c$, vagy $a^2 + b^2 = c^2$. A legnagyobb magasság tehát a szabályos háromszögnél és az egyenlő szárú derékszögű háromszögnél egyenlő a háromszög köré és a háromszögbe írt kör sugarának összegével.

III. megoldás. A versenyzők nagy része a következő összefüggést használta fel a feladat megoldására. A háromszög köré írt kör középpontjának az a , b , c oldaltól mért távolságát rendre d_a , d_b , d_c -vel jelölve

$$d_a + d_b + d_c = r + \varrho.$$

A háromszög kétszeres területét kiszámíthatjuk úgy is, mint az AKB , BKC , CKA háromszögek kétszeres területének összegét. Így kapjuk a következő összefüggést:

$$am = 2t = ad_a + bd_b + cd_c \geq a(d_a + d_b + d_c) = a(r + \varrho),$$

ahol a ismét a legkisebb oldalt, vagy a legkisebbek egyikét jelöli, s így m a magasságok közt előforduló legnagyobb érték. Itt oszthatunk a pozitív a értékkel, és megkapjuk a kívánt egyenlőtlenséget. Nyilvánvalóan egyenlőség áll fenn, ha a három oldal egyenlő, vagyis a szabályos háromszögnél. Fennállhat azonban egyenlőség úgy is, hogy valamelyik d nulla, és a másik kettő szorzója egyenlő. Ez valóban bekövetkezhet, mert a körülírt kör középpontján átmenő oldal a kör átmérője, tehát a háromszög legnagyobb oldala. Ebben az esetben a háromszög egyenlő szárú derékszögű háromszög.

Jegyzet. Hasonlóan látható, hogy a legkisebb magasság viszont nem nagyobb a két körsugár összegénél. Itt már csak a szabályos háromszög esetén áll fenn egyenlőség.

A felhasznált összefüggés belátható például trigonometriai átalakítások segítségével. (Lásd pl. Érdekes matematikai gyakorló feladatok, IV., 126. feladat, megoldása 139–141. old.)