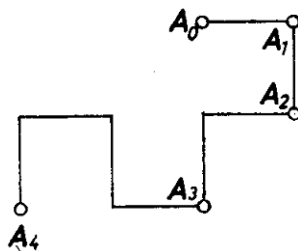


Előző számunk hátsó borítóján egy sárkánygörbét láthattunk. A görbe a következőképpen készült. Kiindultunk az A_0A_1 szakaszból (1. ábra), ezt A_1 körül pozitív irányban 90° -kal elforgattuk, kaptuk $A_0A_1A_2$ töröttvonalat. Ezt A_2 körül pozitív irányban 90° -kal elforgattuk, kaptuk az $A_0A_1A_2A_3$ töröttvonalat stb. Végül az így kapott kacsaringós vonalat A_0 körül még háromszor 90° -kal megforgattuk. (Előbb a sarkokat legömbölyítettük: ne legyen a sárkány olyan szúrós.) Két dolgot kellett bizonyítanunk: 1. a görbe sohasem metszi saját magát, 2. a görbe „kitölti” az egész síkot. Nézzük meg pontosan, mit is jelentenek ezek az állítások.



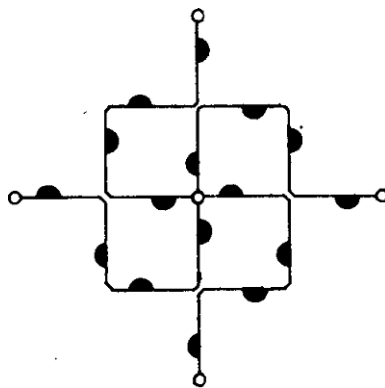
1. ábra

A sárkánygörbét négyzethálós papírra érdemes rajzolnunk. Ha A_0A_1 éppen egy kis négyzet oldala, akkor a töröttvonal minden oldala egy-egy négyzetoldal lesz. Az, hogy a görbe nem metszi saját magát, azt jelenti, hogy minden négyzetoldalon legfeljebb egyszer halad át (az A_0 -ból induló másik három ággal együtt), bár egy-egy rácspontba kétszer is befuthat. A síkot a görbe „kitölti”, ha bármely négyzetoldalon legalább egyszer végigmegy, feltéve, hogy görbénkből már elég sokat megrajzoltunk. Ezeket az állításokat fogjuk igazolni.

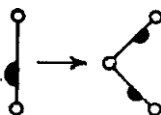


2. ábra

Először is módosítsuk a sárkánygörbét egy picit: ne egy közös szakaszból induljunk bunkó ki, hanem egy „bunkós” szakaszból, amilyen a 2. ábrán látható. Legyen az előírás szerint elkészített töröttvonal $A_0A_1A_2 \dots A_i$, ahol A_i a töröttvonal utolsó pontja. Ezt A_0 körül még háromszor 90° -kal elforgatjuk, kapjuk az S_i görbét. A 3. ábrán S_3 látható.



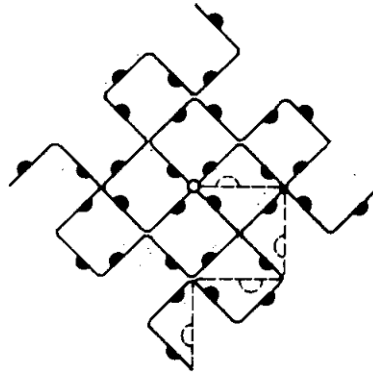
3. ábra



4. ábra

Elegendő állításainkat ezekre a bunkós sárkánygörbékre igazolni, hiszen a bunkókat hagyva megkapjuk a közös (más néven mezei) sárkánygörbét. A továbbiakban alapvető fontosságú a következő:

Ha S_i -ben minden egyes bunkós szakaszt a 4. ábrán látható két kisebb, egymáshoz derékszögben csatlakozó bunkós szakaszra cserélünk le (az irányítás megtartása mellett!), továbbá a kapott alakzatot 45° -kal elforgatjuk és $\sqrt{2}$ -szeresére nyújtjuk, éppen S_{i+1} -et kapjuk.



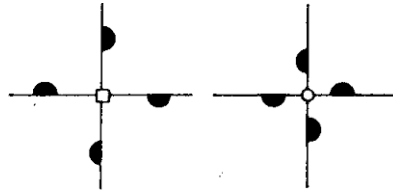
5. ábra

Az 5. ábrán látható, mit kapunk S_3 -ból a szakaszok lecserélése után, a szaggatott vonal S_3 egy ágát mutatja. Az állítás igazsága azonnal következik a sárkánygörbe definíciójából, ennek ellenére azt kérjük az olvasótól, hogy amíg ez nem teljesen világos előtte, ne menjen tovább.

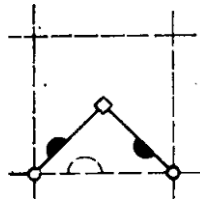
Minden S_i görbére igaz a következő három állítás:

- (1) a görbe semelyik szakaszon sem halad át kétszer (vagy annál többször);
- (2) minden rácspontba a bunkós szakaszok vagy mind a „fejükkel” ($\bigcirc$ -csúcsok) vagy mind a „talpukkal” ($\square$ -csúcsok) futnak be (lásd a 6. ábrát), egy csúcsba természetesen négynél kevesebb szakasz is befuthat;
- (3) az $\bigcirc$ -csúcsok és a $\square$ -csúcsok a rácspontokon felváltva, sakktáblaszerűen helyezkednek el.

Az (1) állítás mondja ki, hogy a sárkánygörbe sohasem metszi magát, a (2) és (3) állítások ennek bizonyításához szükségesek. Teljes indukciót alkalmazunk: az S_1 , S_2 , S_3 görbékre (1), (2) és (3) is teljesül. Tegyük fel, hogy S_i -re igazak. Mivel (1), (2), (3)-ban nem szerepel sem a görbe mérete, sem elhelyezkedése, elegendő ezeket S_{i+1} helyett arra az alakzatra igazolnunk, melyet S_i -ből a bunkós szakaszok lecserélésével kapunk. Jelöljük ezt T_i -vel.

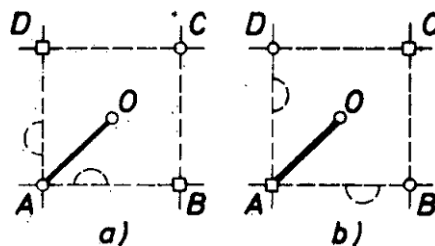


6. ábra

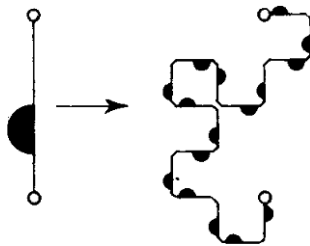


7. ábra

A T_i -nek megfelelő rácspontok egyrészt S_i rácspontjai, másrészt az alpnégyzetek középpontjai. Lecseréléskor a négyzetek középpontjaiba a kis bunkós szakaszok talpa, a négyzetek csúcsaiba azok feje mutat. Így (2) és (3) T_i -re biztosan teljesül (7. ábra). (1) igazolásához tegyük fel, hogy OA a T_i görbe egy szakasza, ahol O az $ABCD$ alpnégyzet középpontja (8. ábra). Azt kell megmutatnunk, hogy OA -t nem kaphattuk meg kétszer is, két különböző S_i -beli szakasz lecserélésekor. Az OA szakaszt csak az AB vagy az AD lecseréléséhez kaphattuk, azaz vagy AB vagy AD S_i -hez tartozik (lehet, hogy mindkettő). Különböztessünk meg két esetet: a) A $\bigcirc$ -csúcs; b) A $\square$ -csúcs. Tudjuk, hogy S_i -re igaz (3), ezért a B , C és D csúcsoknak (S_i -ben) olyanoknak kell lenniük, mint ahogyan az ábrán jelöltük. S mivel S_i -re igaz (2) is, azért az AB -n, illetve AD -n a bunkó (feltéve, hogy AB , ill. AD az S_i -hez tartozik) csak a jelölt helyen állhat. Az a) esetben OA -t kizárólag AB , a b) esetben kizárólag AD lecserélésével kaphatjuk meg. Evvel (1)-et is bizonyítottuk.

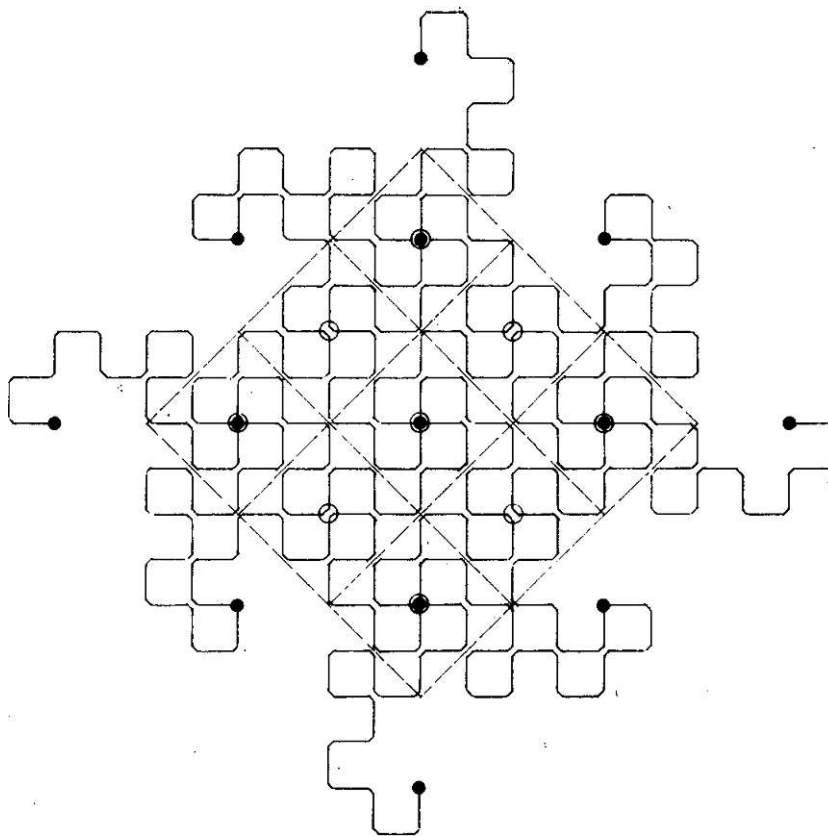


8. ábra

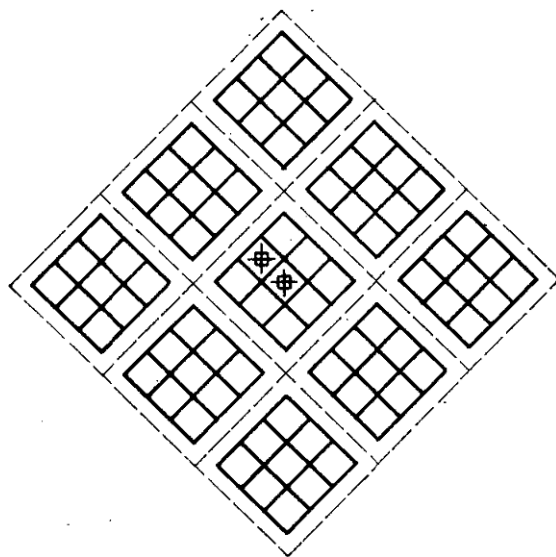


9. ábra

Összefoglalva: igazoltuk, hogy *a sárkánygörbe sohasem metszi saját magát*. Hátra van még az, hogy a görbe kitölti a síkot. Ehhez megjegyezzük, hogy ha ugyanabból a szakaszból kiindulva elkészítjük S_i -t és S_{i+1} -et, akkor S_i része S_{i+1} -nek: ha a sárkánygörbe valamit elfoglalt, azt már soha el nem engedi. Így azt kell bizonyítani, hogy ha A_0A_1 éppen egy kis négyzet oldala, akkor bármely négyzetoldal valamelyik S_i -ben (és akkor az összes későbbiben is) benne lesz. Ezt az előzőhöz hasonlóan tesszük. Figyeljük meg, hogy ha S_i -ben minden bunkós szakaszt a 9. ábrán látható vonallal helyettesítünk, majd a kapott alakzatot négyszeresére nyújtjuk, S_{i+4} -et kapjuk. Így például a 10. ábrán $S_{3+4} = S_7$ látható (bunkók nélkül).



10. ábra



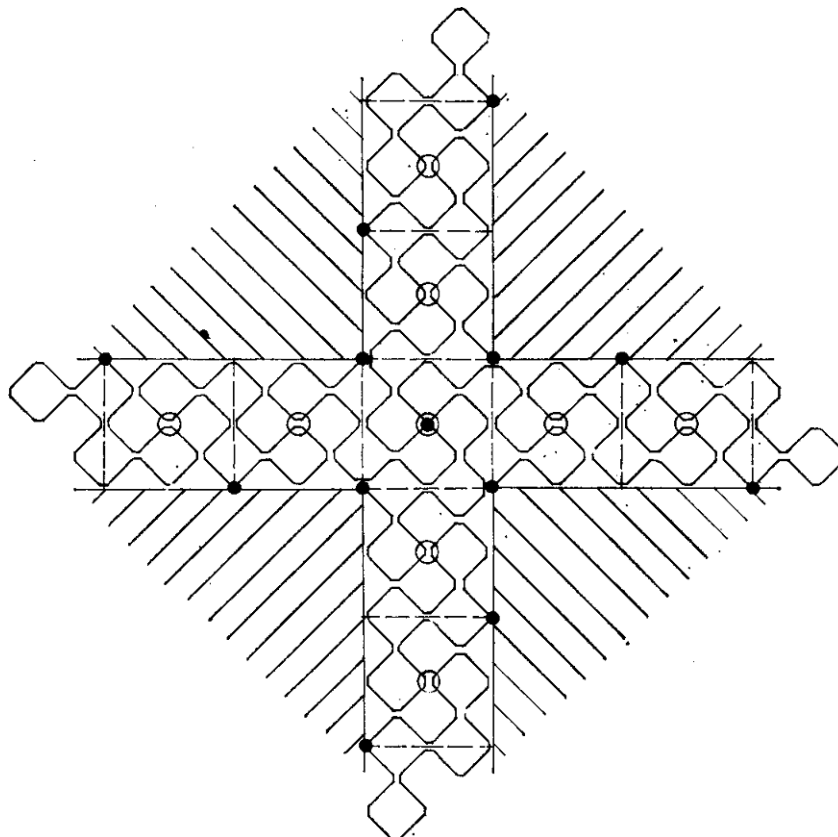
11. ábra

S_7 -ben kilenc, S_3 -mal egybevágó részsárcány is van (szaggatott vonallal elkerítve). Ezek mindegyikéből $S_{7+4} = S_{11}$ -ben egy-egy S_7 sárcány lesz, és azokban újból 9-9 S_3 részsárcány, összesen 81 (11. ábra). S ha most olyan szerencsénk van, hogy az S_7 részsárcányok kilógó „fejei” éppen kitöltik a köztes részt, azaz ott újabb S_3 részsárcányok keletkeznek, akkor készen is vagyunk: S_7 -ben 3×3 szomszédos S_3 van, S_{11} -ben pedig már 11×11 . S_{15} -ben ezek mindegyikéből kilenc S_3 keletkezik, de a közöttük levő részek is kitöltődnek (ugyanúgy, mint S_{11} esetében), azaz itt már egy oldalon $3 \cdot 11 + 10 =$

43 szomszédos S_3 található. Általában S_{4k-1} -ben található szomszédos S_3 részsárcányok száma $\left(\frac{2^{2k-1} + 1}{3}\right)^2$, ami

például azt is jelenti, hogy az A_0 körüli $A_0A_1 \cdot \frac{2^{2k-1} + 1}{3}$ sugarú körbe eső minden alapnégyzet oldala az S_{4k-1} görbéhez tartozik.

A bizonyítás befejezéséhez már csak szerencsénket kell ellenőriznünk. A 12. ábrán négy, sarkosan álló S_7 sárcány fejeit rajzoltuk le. Ezek jól láthatóan minden helyet elfoglalnak.



12. ábra