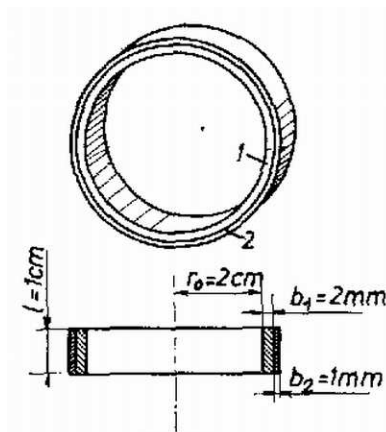


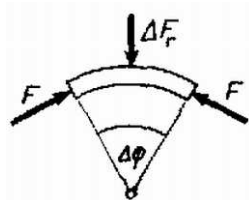
1. A két acél hengergyűrűt (1. ábra) úgy tolták egymásba, hogy a nagyobb gyűrű hőmérséklete 520°C , a kisebbé 20°C volt. Ekkor a 2. gyűrű belső sugara $9 \cdot 10^{-3}\text{cm}$ -rel nagyobb volt, mint az 1. gyűrű külső sugara. Legalább mekkora tengelyirányú erő szükséges a gyűrűk szétválasztásához, amikor mindkét gyűrű 20°C hőmérsékletű, ha a tapadási súrlódási együttható $\mu_0 = 0,16$? (Az acél lineáris hőtágulási együtthatója $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$, Young modulusza $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Nm}^{-2}$.)



1. ábra

Megoldás. Lehűléskor a külső gyűrű összehúzódik. Ha a belső gyűrű nem lenne jelen, belső sugara $r_0 \alpha \Delta t = 12 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$ -rel csökkenne, ami $\delta = 3 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$ -rel nagyobb a két gyűrű kezdeti távolságánál. Így mindkét gyűrű rugalmas alakváltozást szenved, az 1. gyűrű külső sugara $|\Delta r_1|$ értékkel csökken, a 2. gyűrű belső sugara Δr_2 -vel nő, ahol

$$(1) \quad |\Delta r_1| + \Delta r_2 = \delta.$$



2. ábra

A két gyűrű között sugárirányú erő hat, legyen ennek nagysága egy kis $\Delta\varphi$ középponti szöghöz tartozó felületen ΔF_r . A belső gyűrű $\Delta\varphi$ szöghöz tartozó darabja ΔF_r , és az F nagyságú belső erők hatására egyensúlyban van (2. ábra), így

$$(2) \quad \Delta F_r = 2F \sin(\Delta\varphi/2) \approx F \cdot \Delta\varphi.$$

F hatására a belső gyűrű kerülete $F \cdot 2\pi r_0 / (Elb_1)$, sugara

$$(3) \quad |\Delta r_1| = \frac{Fr_0}{Elb_1}$$

értékkel csökken. Hasonlóan a külső gyűrű sugarának növekedése

$$(4) \quad \Delta r_2 = \frac{Fr_0}{Elb_2}.$$

$|\Delta r_1|$ és Δr_2 értékét (1)-be helyettesítve F kifejezhető:

$$(5) \quad F = \frac{El\delta}{r_0} \cdot \frac{b_1 b_2}{b_1 + b_2}.$$

Egy $\Delta\varphi$ középponti szöghöz tartozó felületen a súrlódási erő maximális értéke

$$\Delta S_m = \mu_0 \Delta F_r = \mu_0 \frac{El\delta}{r_0} \cdot \frac{b_1 b_2}{b_1 + b_2} \Delta\varphi,$$

a teljes érintkező felületre összegezve

$$S_m = 2\pi\mu_0 \frac{El\delta}{r_0} \cdot \frac{b_1 b_2}{b_1 + b_2} \approx 2000 \text{ N}.$$

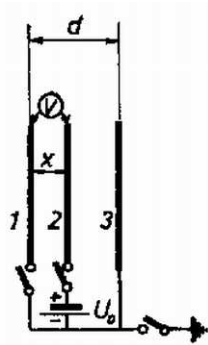
2. A három vezető lemez egyenlő A területű, méretük sokkal nagyobb kölcsönös távolságuknál. Adva van A , d és U_0 (3. ábra).

a) Kikapcsoljuk a telepet, amikor a 2. lemez az $x = d/2$ helyen van, azután a 2. lemezt különböző helyzetekbe toljuk. (A 2. lemezhez vezető kapcsolót közben nem kapcsoljuk be.) Hogyan függ az U_{12} potenciálkülönbség x -től?

b) Szétkapcsoljuk az 1. és 3. lemez földvezetékét is, amikor a 2. lemez az $x = d/4$ helyen van, azután az $x = d/2$ helyre visszük. Mennyi ekkor az U_{12}/U_0 hányados értéke?

c) Elvesszük a 3. lemezt. (A 2. lemez helye $x = d/2$ most is, és továbbra is mindegyik lemez szigetelt állapotban van.) Mennyi most U_{12}/U_0 ?

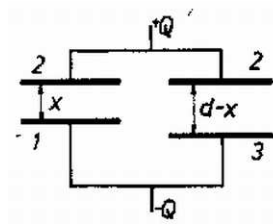
d) Mekkora elektrosztatikus erő hat az 1. lemezre a b) és c) esetben?



3. ábra

Megoldás. a) A kezdeti állapotban két párhuzamosan kapcsolt kondenzátorunk van, mivel a 2. lemez két oldala ekvipotenciális (4. ábra). A fegyverzetek területe A , távolsága $d/2$, így a 2. lemez töltése

$$(1) \quad Q = U_0 \cdot (C_{12} + C_{23}) = U_0 \cdot 2 \frac{A\epsilon_0}{(d/2)} = 4U_0 \frac{A\epsilon}{d}.$$



4. ábra

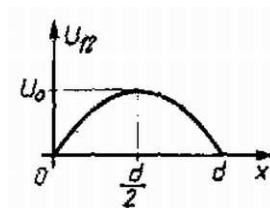
A telepet ebben a helyzetben kikapcsoljuk, így a 2. lemez töltése ezután nem változik. x változtatásával a két párhuzamosan kapcsolt kondenzátor eredő kapacitását változtatjuk:

$$(2) \quad C(x) = \frac{A\epsilon_0}{x} + \frac{A\epsilon_0}{d-x} = \frac{A\epsilon_0 d}{x(d-x)}.$$

Ezt felhasználva a potenciálkülönbség a fegyverzetek között

$$(3) \quad U_{12}(x) = \frac{Q}{C(x)} = \frac{4U_0}{d^2} x(d-x),$$

x másodfokú függvénye (5. ábra).



5. ábra

b) Amikor a lemez az $x = d/4$ helyen van, (3) alapján $U_{12}(d/4) = (3/4)U_0$, az 1. lemez töltése

$$(4) \quad Q_1 = -\frac{A\varepsilon_0}{(d/4)} \cdot \frac{3}{4} U_0 = -3 \frac{A\varepsilon_0}{d} U_0.$$

Mivel ekkor a földvezeték is szétkapcsoljuk, a lemez – és így az 1 – 2 kondenzátor – töltése ezután nem változik. A 2. lemezt az $x = d/2$ helyre tolva

$$C_{12} = \frac{A\varepsilon_0}{(d/2)}, \quad U_{12} = \frac{|Q_1|}{C_{12}},$$

tehát

$$(5) \quad \frac{U_{12}}{U_0} = \frac{3(A\varepsilon_0/d)U_0}{2(A\varepsilon_0/d)U_0} = \frac{3}{2}.$$

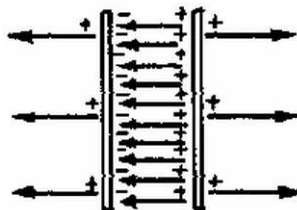
c) A 3. lemezt elvéve olyan kondenzátort kapunk, amelynek két fegyverzetén különböző nagyságú töltés van. Ekkor a feszültséget definíciója alapján, a télerősség meghatározásával számíthatjuk ki. Egy Q/A töltéssűrűségű sík lemez $E = \frac{Q}{2\varepsilon_0 A}$ télerősségű elektrosztatikus teret hoz létre, így a szuperpozíció elve alapján az 1. és 2. lemez által létrehozott elektromos tér a lemezek között

$$(6) \quad E_{12} = -\frac{Q_1}{2A\varepsilon_0} + \frac{Q}{2A\varepsilon_0} = \frac{7}{2} \frac{U_0}{d}.$$

A lemezek között a feszültségkülönbség

$$(7) \quad \frac{U_{12}}{U_0} = \frac{7}{2} \frac{U_0}{d} \cdot \frac{d}{2} \cdot \frac{1}{U_0} = \frac{7}{4}.$$

Megjegyzendő, hogy ekkor $3,5 \cdot U_0 \frac{A\varepsilon_0}{d}$ adódik a kondenzátor töltésére a $Q = U \cdot C$ összefüggésből. Ekkora abszolút értékű pozitív, ill. negatív töltés van a 2. és az 1. lemez belső oldalán, a külső oldalon mindkét lemezen $+0,5 \cdot U_0 \frac{A\varepsilon_0}{d}$ töltés van (1. a 6. ábrát).



6. ábra

d) Kondenzátorok fegyverzetére ható erőt nem számíthatjuk ki a Coulomb-törvényből, hiszen a töltésekre a saját maguk által létrehozott tér hat, így leárnnyékoló hatások érvényesülnek.

Az erőt a munkatételből számíthatjuk ki. A b) és a c) esetben az egyes lemezek egymástól és a környezettől szigeteltek, így töltésük állandó. Az 1. és 2. lemez közötti télerősséget az 1. lemez belső felületének felületi töltéssűrűsége határozza meg. A b) esetben

$$E_{12} = \frac{|Q_1|}{\varepsilon_0 A} = 3 \frac{U_0}{d},$$

míg a c) esetben

$$E_{12} = \frac{3,5U_0\varepsilon_0 A/d}{\varepsilon_0 A} = 3,5 \frac{U_0}{d}.$$

Ha az 1. lemezt kicsi Δz távolsággal közelítjük a 2. lemezhez, a térerősség állandó marad, viszont az elektrosztatikus erőter $(1/2)\varepsilon_0 E^2$ energiasűrűségének megfelelően az elektrosztatikus energia megváltozását a fegyverzetre ható F erő munkája okozza:

$$F \Delta z = (1/2)\varepsilon_0 E_{12}^2 A \cdot \Delta z,$$

ahonnan a fegyverzetre ható erő

$$F = (1/2)\varepsilon_0 A E_{12}^2.$$

A *b)* esetben

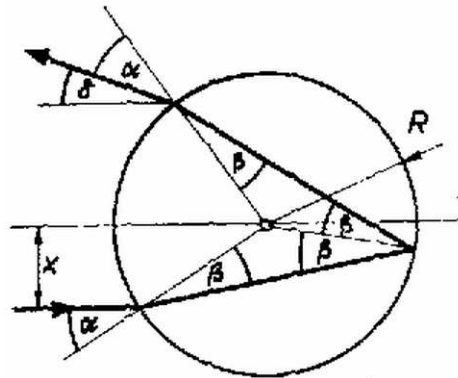
$$F_b = \frac{9}{2} \frac{\varepsilon_0 A}{d^2} U_0^2,$$

míg a *c)* esetben

$$F_c = \frac{49}{8} \frac{\varepsilon_0 A}{d^2} U_0^2.$$

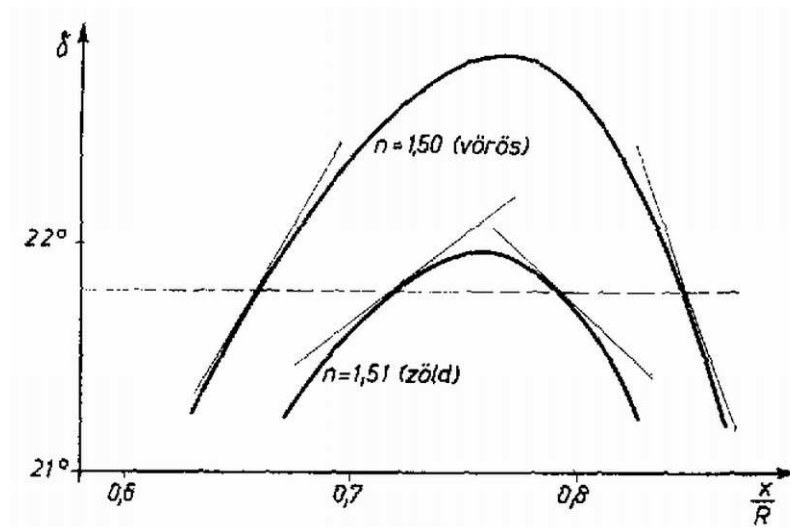
3. Párhuzamos fénynyaláb esik egy üveggömbre; a nyaláb egyenlő intenzitású vörös és zöld fény keveréke. (A megfelelő törésmutatók: $n_{\text{vörös}} = 1,500$, $n_{\text{zöld}} = 1,510$.)

a) Határozzuk meg a δ elhajlási szöget az x távolság függvényében (l. a 7. ábrát). Ellenőrizzük a 8. ábra $\delta = f(x/R)$ grafikonját két számszerű adattal.



7. ábra

b) Határozzuk meg a belépő nyaláb azon keresztmetszetének $\Delta A/R^2$ relatív értékét, amelyben beérkező fénysugarak $\delta = 21,80^\circ$ körüli $\Delta\delta$ szögtartományban verődnek vissza. (Használjuk a 8. ábra grafikonjait! A számítást végezzük el mindkét színű összetevőn!)



8. ábra

9. ábra

c) A 9. ábra szerint színezett, gyorsan forgó korong felületén színes köröket lehet látni. Ezek egyike ugyanolyan színű, mint az üveggömből $\delta = 21,80^\circ$ -os elhajlással visszaverődő fény. Mekkora ennek a körnek az r sugara? (A korong különböző színű felületszélei felületegységenként egyenlő intenzitású fényt bocsátanak ki. Hanyagoljuk el a gömből közvetlenül – törés nélkül – visszaverődő sugarakat.)

d) Növekszik vagy csökken r értéke az előzőhöz képest, ha a közvetlenül visszavert sugarak intenzitása nem elhanyagolható?

Megoldás. a) A 7. ábra alapján könnyen belátható, hogy

$$\delta = 360^\circ - (\alpha - \beta) - (360^\circ - 2\beta) - (\alpha - \beta) = 2(2\beta - \alpha).$$

A törési törvény alapján

$$\sin \alpha = \frac{x}{R}, \quad \text{és} \quad \sin \beta = \frac{x}{nR},$$

így

$$\delta = 2[2\arcsin[x/(nR)] - \arcsin(x/R)].$$

Ennek alapján a 8. ábra grafikonja ábrázolható.

b) A grafikon alapján meghatározhatók x/R azon értékei, amelyeknél az eltérülés szöge $\delta = 21,80^\circ$:

	x_1	$\left(\frac{\Delta\delta}{\Delta x}\right)_{x_1}$	x_2	$\left(\frac{\Delta\delta}{\Delta x}\right)_{x_2}$
$n = 1,50$	0,66	18°	0,85	-30°
$n = 1,51$	0,72	8°	0,79	-9°

A δ körüli $\Delta\delta$ szögtartományban visszaverődő sugarak a beeső nyaláb x sugarú, Δx szélességű körgyűrű alakú keresztmetszetéből érkeznek. Ennek relatív területe

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{2x\pi \cdot \Delta x}{R^2\pi} = 2 \frac{x}{R} \cdot \frac{\Delta x}{R} = 2 \frac{x}{R} \cdot \left| \frac{\Delta\delta}{\frac{\Delta x}{R}} \right|^{-1}.$$

Ugyanahhoz az eltérülési szöghöz két keresztmetszet tartozik, a numerikus értékeket beírva

$$\begin{aligned} n = 1,50 \text{ esetén } \frac{\Delta A}{A} &= \frac{\Delta A_1}{A} + \frac{\Delta A_2}{A} = 0,065 \frac{2\Delta\delta}{1^\circ}; \\ n = 1,51 \text{ esetén } \frac{\Delta A}{A} &= \frac{\Delta A_1}{A} + \frac{\Delta A_2}{A} = 0,18 \frac{2\Delta\delta}{1^\circ}. \end{aligned}$$

c) A zöld és a vörös fény relatív intenzitását a beeső nyaláb megfelelő keresztmetszeteinek aránya határozza meg:

$$\frac{I_{\text{zöld}}}{I_{\text{vörös}}} = \frac{0,18}{0,065} = 2,8.$$

A forgó korong egy r sugarú körének színét a kör zöld és vörös színű íveinek relatív hosszúsága adja. A visszaverődő fénnel azonos színű körre

$$\frac{180^\circ - \gamma}{\gamma} = \frac{I_{\text{zöld}}}{I_{\text{vörös}}},$$

ahonnan $\gamma = 47^\circ$. A kör sugara

$$r = \frac{b}{2\sin(\gamma/2)} = 1,25 \text{ cm.}$$

d) A gömbről közvetlenül visszaverődő sugarak intenzitása közelítőleg független a fény színétől. Így figyelembevételelünkkel a kétféle színű fény intenzitás-aránya 1-hez, γ értéke 90° -hoz közeledik. Ez esetünkben r csökkenésének felel meg.