

A Gy. 1799. gyakorlatban (lásd ezen számunk 220. oldalán) legnagyobb közös osztóról, legkisebb közös többszörösről van szó. Két szám legnagyobb közös osztója, illetve legkisebb közös többszöröse lehet a két szám egyike, de lehet egy harmadik szám is. Például 12 és 4 legnagyobb közös osztója, amit $(12, 4)$ -gyel szokás jelölni, 4; legkisebb közös többszörösük, aminek jele $[12, 4]$, éppen 12. Hasonlóan $(12, 12) = 12$; $(12, 9) = 3$; $(12, 5) = 1$; $[12, 6] = 12$; $[12, 12] = 12$; $[12, 8] = 24$. (Ha a két szám egyenlő, a legnagyobb közös osztójuk és legkisebb közös többszörösük természetesen ugyanannyi.) Akármelyik eset fordul is elő a fentiek közül, két szám legnagyobb közös osztójának, illetve legkisebb közös többszörösének megkeresését tekinthetjük olyan műveletnek, amely két számhoz egy harmadik számot rendel hozzá.

A matematikában gyakran fordulnak elő olyan műveletek, amelyek egy halmaz elemeiből képzett párokhoz a halmaz egy-egy elemét rendelik. Az ilyen műveleteket kétváltozós műveleteknek nevezzük. (Vannak nem kétváltozós műveletek is. Például az, amelyik minden számhoz az ellentettjét rendeli, egyváltozós.)

Néhány példa kétváltozós műveletekre:

a halmaz:	a művelet :
1. a természetes számok	a legnagyobb közös osztó képzése
2. a természetes számok	a legkisebb közös többszörös képzése
3. a valós számok	az összeadás
4. a valós számok	a kivonás
5. a racionális számok, kivéve a 0-t	az osztás
6. a 0 és 1 elemekből álló halmaz	a szorzás
7. a $[0, x]$ szakaszok halmaza, ahol $x \geq 0$	a halmazelméleti metszet művelet
8. a $[0, x]$ szakaszok halmaza, ahol $x \geq 0$	a halmazelméleti unió művelet.

Gyakran fordul elő, hogy ugyanazon a halmazon nem egy, hanem két kétváltozós műveletet is definiálunk. A fenti példák közül az 1–2., 3–4., 7–8. ilyenek. A továbbiakban, – hogy általában is beszélhessünk ezekről – a halmazt H -val, elemeit az x, y, z stb. betűkkel, végül a két kétváltozós műveletet $\wedge$, illetve $\vee$ jelekkel jelöljük. A $\wedge, \vee$ műveleteket rendszerint metszetnek, illetve uniónak mondják, de ezek a műveletek (általában) különböznek a szokásos halmazok között értelmezett metszet ($\cap$) és unió ($\cup$) műveletektől. Persze nagyon sokféleképpen lehet a H halmazt kijelölni és azon két kétváltozós műveletet megadni. A továbbiakban csak azokat az eseteket vizsgáljuk, amelyekben a $\wedge, \vee$ műveletek eleget tesznek a következő kikötéseknek:

Ia	$x \wedge x = x,$	Ib	$x \vee x = x$
IIa	$x \wedge y = y \wedge x$	IIb	$x \vee y = y \vee x$
IIIa	$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$	IIIb	$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$
IVa	$x \wedge (y \vee x) = x$	IVb	$x \vee (y \wedge x) = x$

Ha egy H halmazon a $\wedge, \vee$ műveletek olyanok, hogy kielégítik a felsorolt nyolc kikötést – matematikai nyelven szólva axiómát –, akkor a H halmazt a rajta értelmezett $\wedge, \vee$ műveletekkel *hálónak* nevezzük, és ezt így írjuk: $(H, \wedge, \vee)$ háló.

Mit jelentenek valójában a formulákkal leírt *hálóaxiómák*? Az **Ia** és **Ib** azt mondja ki, hogy a halmaz két azonos eleméhez mindkét művelet magát az elemet rendeli. A **IIa** és **IIb**, illetve **IIIa** és **IIIb** axiómák – a valós számok összeadásánál és szorzásánál már megismert – kommutatív, illetve asszociatív tulajdonság teljesülését követelik meg. Legérdekesebbek és a hálókra „legjellemzőbbek” a **IVa**, **IVb** axiómák. Ezek a $\wedge, \vee$ műveletek egymáshoz való viszonyára vonatkoznak, azt mondják ki, hogy a hálóban a $\wedge, \vee$ műveletek között milyen összefüggésnek kell lennie.

Nézzük meg, hogy kiindulási példánkban, az $(\mathbf{N}, (), [])$ -ban – ahol $\mathbf{N}$ a természetes számok halmazát, $()$ és $[]$ a legnagyobb közös osztó képzés, illetve a legkisebb közös többszörös képzés műveletét jelöli –, teljesülnek-e a háló-axiómák? Jelöljük a természetes számokat $m, n, k, \dots$ betűkkel.

Az **Ia**, **Ib** axiómák nyilván teljesülnek, mert

$$(m, m) = m \quad \text{és} \quad [m, m] = m.$$

A **IIa**, **IIb** axiómák is teljesülnek, mert két szám legnagyobb közös osztója és legkisebb közös többszöröse nem függ a számok sorrendjétől, azaz:

$$(m, n) = (n, m) \quad \text{és} \quad [m, n] = [n, m].$$

A **IIIa**, **IIIb** axiómák is fennállnak hiszen már az **I.** osztályban bizonyítottuk, hogy

$$(m, (n, k)) = ((m, n), k) \quad \text{és} \quad [m, [n, k]] = [[m, n], k].$$

A **IVa**, **IVb** axiómák teljesülését is könnyen beláthatjuk annak alapján, hogy két szám legnagyobb közös osztója nem nagyobb, mint a két szám bármelyike, és két szám legkisebb közös többszöröse nem kisebb, mint a két szám bármelyike.

Tehát a hálóaxiómák teljesülnek, máris láttunk egy „élő” hálót. Ebben a hálóban – az 1799. gyakorlat szerint – még az alábbi két összefüggés is igaz:

$$(m, [n, k]) = [(m, n), (m, k)] \quad \text{és} \quad [m, (n, k)] = ([m, n], [m, k]).$$

Ezek az összefüggések a hálók általános nyelvén így írhatók:

$$\mathbf{Va} \quad x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \quad \mathbf{Vb} \quad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

Az **Va**, **Vb** összefüggések a két hálóműveletnek – a valós számok szorzásánál és összeadásánál ugyancsak ismert – disztributív tulajdonságát mondják ki. Az olyan hálót, amelyekben az **Va**, **Vb** tulajdonságok is teljesülnek, *disztributív hálónak* hívják.

Lássunk további példákat hálókra!

1. Legyen H az egészek halmaza és legyen a k, l egészekre

$$k \vee l = \max(k, l), \quad \text{illetve} \quad k \wedge l = \min(k, l).$$

2. Álljon H az „igaz” és „hamis” elemekből, $\wedge$ és $\vee$ legyenek a logikában szereplő „és”, illetve „vagy” műveletek, azaz az alábbi művelettáblák írják le a $\wedge$, illetve $\vee$ műveleteket:

$\wedge$	igaz	hamis
igaz	igaz	hamis
hamis	hamis	hamis

$\vee$	igaz	hamis
igaz	igaz	igaz
hamis	igaz	hamis

3. Legyen M egy halmaz, álljon H az M összes részhalmazából, az üres halmazt is beleértve. Ekkor H -nak A, B elemeire (melyek M -nek részhalmazai) legyen $A \wedge B = A \cap B$ és $A \vee B = A \cup B$. Az így kapott hálót M részhalmazhálójának szokás nevezni.

4. Legyen H a $[0, 1]$ intervallumon értelmezett valós függvények halmaza. Tetszőleges H -beli f_1 és f_2 elemekre (függvényekre) legyen $f_1 \wedge f_2$ az a h , amelyre $h(x) = \min(f_1(x), f_2(x))$, ha $0 \leq x \leq 1$, illetve $f_1 \vee f_2$ az a g , amelyre $g(x) = \max(f_1(x), f_2(x))$, ha $0 \leq x \leq 1$.

Az olvasó maga könnyen ellenőrizheti, hogy a felsorolt példák valóban hálók.

Tovább vizsgálva kiindulási példánkat, $(\mathbf{N}, (), [])$ -t, észrevehetjük, hogy az 1 speciális tulajdonságú szám: bármely természetes számnak és 1-nek a legnagyobb közös osztója 1, azaz: $(n, 1) = 1$, amit a hálók nyelvén felírva:

$$\mathbf{VIa} \quad x \wedge 0 = 0.$$

Általában, ha egy hálóban van olyan o elem, hogy tetszőleges x H -beli elemre **VIa** fennáll, akkor a hálót *nullelemesnek* hívják. Ha van ilyen o , azt (vagy azokat) a háló *nullelemének* mondják. Tehát $(\mathbf{N}, (), [])$ nullelemes háló, nulleleme az 1.

Lehet-e egy hálóban több különböző nullelem? Tegyük fel, hogy o_1 és o_2 nullelemek. Ekkor o_1 -re és o_1 -re teljesül **VIa**, azaz

$$o_2 \wedge o_1 = o_1 \quad \text{és} \quad o_1 \wedge o_2 = o_2.$$

De **IIa** miatt $o_2 \wedge o_1 = o_1 \wedge o_2$, így $o_1 = o_2$, vagyis a két nullelem azonos. Tehát egy hálóban legfeljebb egy nullelem lehet.

Az eddigi axiómák és tulajdonságok olyan párokat alkottak, hogy egy-egy pár 2 tagja hasonló tulajdonságot mondott ki a $\wedge$, illetve $\vee$ műveletre. Ennek alapján felírhatjuk a **VIa** tulajdonság „párját”:

$$\mathbf{VIb} \quad x \vee e = e.$$

Ha egy hálóban van olyan e elem, hogy tetszőleges x H -beli elemre **VIb** fennáll, akkor a hálót *egységelemesnek* hívják. Ha van ilyen e , azt (vagy azokat) a háló *egységelemének* mondják. Könnyen látható, hogy a $(\mathbf{N}, (), [])$ hálóban nincs egységelem. – Ahogyan azt beláttuk, hogy egy hálóban legfeljebb egy nullelem van, ugyanúgy belátható, hogy egységelem is legfeljebb egy lehet.

A $(H, \wedge, \vee)$ háló *véges*, ha H véges sok elemből áll. Ha $(H, \wedge, \vee)$ egy véges háló, akkor van benne egységelem és nullelem is. Álljon ugyanis H az $x_1, \dots, x_n$ elemekből. Ekkor az **Ia**, **IIa**, **IIIa**, illetve **Ib**, **IIb**, **IIIb** axiómák felhasználásával belátható, hogy

$$(\dots((x_1 \wedge x_2) \wedge x_3) \wedge \dots) \wedge x_n \text{ nullelem,}$$

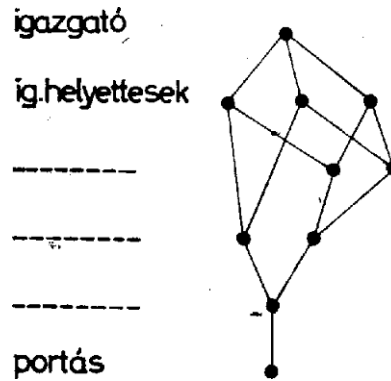
$$(\dots((x_1 \vee x_2) \vee x_3) \vee \dots) \vee x_n \text{ egységelem.}$$

Egy háló végessége tehát elégséges, de nem szükséges feltétel arra, hogy a hálóban legyen egységelem és nullelem.

Az itt felsorolt tulajdonságok mellett még nagyon sok minden mondható a hálókról. Mindenki maga is felfedezhet vagy gyárthat további hálókat, és azokat vizsgálva újabb tulajdonságokat bizonyíthat be. A hálókról további ismeretek és feladatok találhatók *Dr. Szász Gábor*: Hálóelmélet c. szakköri füzetében (Tankönyvkiadó, 1978).

Gyakorlásul szolgálhatnak a következő feladatok (megoldásuk a szerkesztőségbe küldhető, a legjobb megoldásokat jutalmazzuk):

1. A fenti 1–4. példák közül melyek *a)* disztributív, *b)* egységelemes, *c)* nullelemes, hálók?
2. Hogyan lehetne az $(\mathbf{N}, (), [])$ hálót további elem (elemek) hozzávételével egységelemessé tenni?
3. Adjuk meg az összes, legfeljebb 4 elemű hálót.
4. Bizonyítsuk be, hogy ha e egységelem, o nullelem, akkor tetszőleges x elemre: $x \wedge e = x$, valamint $x \vee o = x$.
5. Az ábra egy hivatal felépítését szemlélteti: a pontok embereket jelölnek, a pontokat összekötő vonalak az emberek közötti „főnök–beosztott” viszonyt. Ha egy X pontból mindig lefelé haladó törött vonalon el lehet jutni az Y ponthoz, akkor Y az X -nek beosztottja és X az Y -nak főnöke.



Látjuk, hogy ennek a hivatalnak két tetszőleges dolgozója nem mindig van főnök–beosztott viszonyban, ilyenkor magasabb rangúnak mondjuk azt, akinek a pontja följebb levő sorban van. (Természetesen a főnök is magasabb rangú, mint a beosztottja.) A felrajzolt hivatal olyan, hogy bármely 2 ember közül vagy egyik beosztottja a másiknak, vagy pedig van legalább egy közös főnökük és legalább egy közös beosztottjuk, és közös főnökeik közt van pontosan egy legalacsonyabb rangú, illetve közös beosztottjaik közt van pontosan egy legmagasabb rangú. A közös főnökök közül a legalacsonyabb rangúnak a megkeresése kétváltozós művelet, úgyszintén a közös beosztottak közül a legmagasabb rangúnak a megkeresése is. (Ezekben a műveletekben egy embert önmaga főnökének tekintünk, egyben önmaga beosztottjának is.)

Mutassuk meg, hogy ezzel a két művelettel a hivatal felépítése hálót alkot, továbbá keressük meg az egységelemet és a nullelemet. Rajzoljuk fel különböző típusú hivatalok diagramját!

6. Az 5. feladat ábrájának mintájára rajzoljuk fel az $M = \{1, 2, 3\}$ halmaz részhalmazhálójának diagramját !