

## Híres matematikai feladatok

*Egy Eulertől származó feladat és annak hazai vonatkozásai*

Leonhard Euler (1707–1783) vetette fel 1751-ben azt az elemi geometriai kérdést, hogy az  $n$  oldalú (síkbeli) konvex sokszög hányféleként darabolható föl háromszögekre olyan átlók segítségével, amelyek nem metszik egymást a sokszög belsejében (hányféleként „háromszögelhető”). Jelölje ezt a számot  $H_n$ . Nyilván  $H_3 = 1$ . Később hasznunkra lesz, ha  $H_2$  értékét 1-nek definiáljuk. Könnyű belátnunk, hogy  $H_4 = 2$ ,  $H_5 = 5$ . Ha azonban  $n \geq 6$ , akkor egyre bonyolultabb meghatározunk a háromszögelések számát.

A felvetett kérdésre csakhamar maga Euler válaszolt, teljes indukcióval bizonyítva, hogy

$$(1) \quad H_n = \prod_{k=3}^n \frac{4k-10}{k-1}.$$

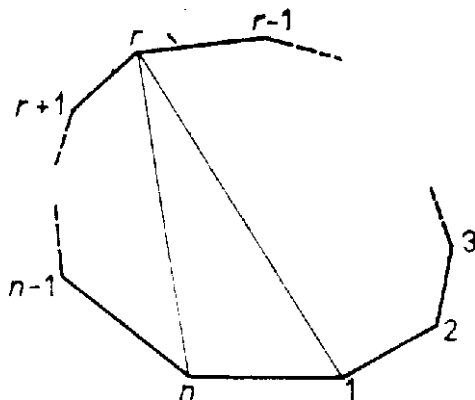
(Emlékeztetőül: a  $\prod$  szimbólum produktumra [szorzatra] utal. Pl.  $\prod_{k=2}^5 k = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ ).

A Pozsony közelében született Segner János András (1704–1777), aki rövid ideig Debrecenben működött mint orvos, majd német egyetemeken tanított, szintén megoldotta 1761-ben a feladatot, és az alábbi rekurzív képletet közölte:

$$(2) \quad H_n = \sum_{r=2}^{n-1} H_r \cdot H_{n+1-r}.$$

A „rekurzió” a matematikában gyakran alkalmazott módszer. Jelen esetben azt jelenti, hogy pl.  $H_{20}$  kiszámításához ismernünk kell  $H_2, H_3, \dots, H_{19}$  mindegyikét.

A Segner-féle bizonyítás nem igényel mélyebb matematikai módszereket, és könnyen megérthető. Eljárása a következő volt:



Válasszuk ki az  $n$  oldalú sokszög valamelyik oldalát – mondjuk  $1n$ -et (vö. ábra) – és tekintsük ezt egy valamelyik felbontáshoz tartozó háromszög alapjának. E háromszög harmadik csúcsa legyen a sokszög  $r$ -edik szögpontja. Az  $n1r$  háromszög két sokszöget hasít le az eredeti sokszögből, ezek közül az egyik  $r$ , a másik pedig  $n+1-r$  oldalú. Ezek háromszögeléseinek száma  $H_r$ , illetve  $H_{n+1-r}$ . Nyilvánvaló, hogy e két sokszög valamelyikének minden felbontásához hozzárendelhető a másik minden felbontása. Ezért az  $r$  csúcs és az  $1n$  alap rögzítése esetén  $H_r \cdot H_{n+1-r}$  felbontás lehetséges. Az összes lehetséges felbontáshoz pedig úgy jutunk, ha  $r$  rendre felveszi a  $2, 3, \dots, n-1$  számokat, és az így kapott értékeket összegezzük. Így nyerjük a (2) formulát, amelyben – mint említettük –  $H_2 = H_3 = 1$ .

Segner  $H_n$  értékét  $n = 20$ -ig ki is számította.

Ezzel azonban nem zárult le az Euler-feladat története: az 1956. évi Schweitzer Miklós versenyen<sup>1</sup> is kitűzték ezt a kérdést, felvetője talán nem tudott a probléma eredetéről. Hat sikeres válasz között szerepelt a következő formula:

$$(3) \quad H_n = \frac{1}{n-1} \binom{2n-4}{n-2}.$$

<sup>1</sup> Schweitzer Miklós (1923–1945) jeles matematikus volt, akit származása miatt az érettségi vizsgálat után nem vettek fel egyetemre. Ő azonban ezek ellenére – önképzés útján elmélyedt a matematikai kutatások módszereiben, és jelentős eredményeket ért el az analízis területén. Budapest ostroma idején igen fiatalon halálozott el. Emlékének megörökítésére a Bolyai János Matematikai Társulat 1949-ben évenként megrendezésre kerülő „Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny”-t létesített egyetemi hallgatók részére. A verseny rendezését felváltva végzik a budapesti, a debreceni és a szegedi tudományegyetem matematikusai. Általában tíz, a magasabb matematikába tartozó feladatot tűznek ki, a résztvevők bármilyen segédeszközt igénybe vehetnek és 8–10 napon át otthon foglalkozhatnak a feladatokkal. Ez a világon az egyik legmagasabb szintű matematikai verseny, az eddig kitűzött feladatok számos önálló kutatásnak képezték a kiindulópontját.

Észrevehetjük, hogy az (1) és a (3) képlet a  $H_n$  természetes számot szorzatként, (2) ugyanazt a természetes számot kéttényezős szorzatok *összegeként* állítja elő. Így a három különböző képlet számelméleti érdekességet is rejt magában.

Gyakorlásként érdemes  $H_n$  értékét különböző  $n$ -ekre kiszámítani, továbbá az (1) és a (3) igazolásán gondolkodni.

Teljesség kedvéért meg kell említenünk, hogy a Schweitzer-verseny valamivel többet is kérdezett, mint Euler. Könnyen belátható ugyanis, hogy  $n \geq 6$  esetén olyan háromszögelések is vannak, amelyeknél egyes háromszögeknek egyetlen oldaluk sem közös a sokszög valamelyik oldalával. Kérdezhetjük tehát azt is, hogy az összes lehetséges háromszögelésekből mennyi azok száma, amelyeknél a sokszöget csupa olyan háromszögekre daraboljuk, amelyek mindegyikének legalább egy közös oldala van a sokszöggel. Ez utóbbi megszorításnak eleget tevő háromszögelések számát jelölje  $h_n$ . Bizonyítható, hogy

$$h_n = n \cdot 2^{n-5}.$$

Például  $H_6 = 14$ ,  $h_6 = 12$ ;  $H_7 = 42$ ,  $h_7 = 28$ .