

Olimpiai előkészítő feladatok

7.

Ebben a rovatban havonta tíz-tíz olyan érdekes – könnyebb vagy nehezebb – feladatot mondunk el, amelyek előkészítőül szolgálnak a Matematikai Diákolimpiára. A feladatok megoldásait nem kérjük beküldeni, a megoldásokat sem fogjuk ismertetni. Az érdeklődők a feladatokkal kapcsolatos kérdéseikkel forduljanak a szerkesztőséghez. Leveleikre írásban válaszolunk.

1. A Föld körül 36 mesterséges bolygó kering. Mutassuk meg, hogy mindig található a Földnek olyan pontja, ahonnan legfeljebb 17 látható közülük.

2. Elhelyezhető-e 91 darab $1 \times 2 \times 4$ -es téglá egy $9 \times 9 \times 9$ -es kockában?

3. Adott az $ABCD$ alaplapú és $A'B'C'D'$ fedőlapú kocka. Az $ABCD$ zárt töröttvonalon egy P pont, a $B'C'D'A'B'$ zárt töröttvonalon egy Q pont mozog, sebességük egyenlő. Amikor a P pont A -ban van, a Q pont B' -ben. Mi a mértani helye a PQ szakasz felezőpontjának?

4. Az előbbi kocka AC lapátlóján kiválasztunk egy X pontot, a $B'D'$ lapátlóján egy Y pontot. Mi az XY szakasz Y -hoz közelebbi harmadolópontjának mértani helye, ha X és Y minden lehetséges helyzetet felvesz?

5. Az a, b, c páronként kitérő egyenesek párhuzamosak az S síkkal. Az a', b', c' egyenesek mindegyike metszi az a, b, c egyenesek mindegyikét. Mutassuk meg, hogy van olyan S' sík, mellyel az a', b', c' egyenesek mindegyike párhuzamos.

6. Az $ABCD$ tetraéder BCD lapja köré írt kör középpontja A' , az ACD lap köré írt kör középpontja B' , stb. Az A, B, C, D csúcsokból rendre merőlegest állítunk a $B'C'D', A'C'D', A'B'D',$ illetve $A'B'C'$ síkokra. Bizonyítsuk be, hogy a négy merőleges egyetlen pontban metszi egymást.

7. Az O -ból induló a, b, c félegyenesek páronként derékszöget zárnak be (azaz derékszögű triédert alkotnak). Egy sík az a, b, c félegyeneseket rendre az A, B, C pontokban metszi. Mutassuk meg, hogy

a) ABC hegyesszögű háromszög;

b) adott XYZ hegyesszögű háromszöghöz található olyan metsző sík, melyre ABC egybevágó XYZ -vel.

c) O -nak az ABC síkra eső vetülete az ABC háromszög magasságpontja.

8. a) Milyen n -re létezik n élű konvex poliéder?

b) Bizonyítsuk be, hogy konvex poliéderben a háromszöglapok és a háromélű csúcsok együttes száma legalább 8.

c) Mutassuk meg, hogy ha egy konvex poliédernek sem háromszögű, sem négyszögű lapja nincs, akkor legalább 12 ötszögű lapja van.

9. Lehet-e a) kockát, b) szabályos oktaédert, c) szabályos dodekaédert merőlegesen vetíteni úgy, hogy a vetület konvex burka szabályos hatszög legyen?

10. a) Mutassuk meg, akárhogyan választunk is ki az egységnyi élű kockában $n > 9$ pontot, mindig található köztük négy, melyek által meghatározott tetraéder térfogata legfeljebb $1/n$.

b) Legyen p prímszám és jelöljük az i egész szám p -vel való osztásakor adódó maradékot $\langle i \rangle$ -vel. Bizonyítsuk be, hogy az $(\langle i \rangle, \langle i^2 \rangle, \langle i^3 \rangle)$ ($i = 1, 2, \dots, p-1$) koordinátájú pontok között nincs négy egy síkban. Ennek alapján mutassuk meg, hogy minden $n > 9$ mellett megadható az egységnyi élű kockában n pont úgy, hogy bármely négy által meghatározott tetraéder térfogata legalább $1/48n^3$.