Tudnivalók. A sorozat első három része az 53. kötet 2. szám 49 – 52. oldalán, az 54. kötet 1. szám 1 – 3. oldalán és az 54. kötet 5. szám 193 – 197. oldalán található. A IV. rész az 55. kötet 2. szám 55 – 58. oldalán van.

A feladatok megoldására pontversenyt nem írunk ki, de a legjobb megoldók között könyvutalványokat sorsolunk ki. A megoldásokat kérjük a lap megjelenését *követő hónap* 20-ig a szerkesztőség címére (1443 Budapest, Postafiók 129) beküldeni. A borítékra írják rá megoldóink: Pell–féle egyenletek. A megoldásokat nem szükséges külön lapra írni, de mindig írják ki, hogy melyik feladat megoldása következik. Bár a feladatok egymásra épülnek, nem szükséges mindegyiket megoldani. Egyes feladatokat úgy is megoldhatunk, hogy elfogadjuk az előző feladatok állításának helyességét. Az új feladatok kitűzésénél figyelembe vesszük a beküldött megoldások tapasztalatait is; éppen ezért kérjük megoldóinkat, hogy a feladatokkal kapcsolatban minden véleményt, felmerült kérdést írjanak meg.

A IV. rész feladataira helyes megoldást küldtek be: Hajnal Péter, Szabó Sándor (részben), Varga Lívia (részben).

A IV. részben kitűzött feladatok megoldása

15. feladat. Legyen $\alpha \in Z[\sqrt{D}]$, $\alpha \neq 1$ és $N(\alpha) = 1$. Jelölje ε az α, $\overline{\alpha}$, $-\alpha$, $-\overline{\alpha}$ számok közül a legnagyobbat. Bizonyítsuk be, hogy

$$-\varepsilon < -1 < -\overline{\varepsilon} < 0 < \overline{\varepsilon} < 1 < \varepsilon$$

Megoldás. A feltételekből azonnal következik, hogy α, $\overline{\alpha}$, $-\alpha$, $-\overline{\alpha}$ mind 0-tól és 1-től különbözők. Mivel $\alpha\overline{\alpha} = 1$, ezért $(-\alpha)(-\overline{\alpha}) = 1$ is teljesül, vagyis α és $\overline{\alpha}$, továbbá $-\alpha$ és $-\overline{\alpha}$ egyenlő előjelűek. Az α és $-\alpha$ a különböző előjelűek, ezért a négy számból 2 pozitív. Ezek 1-től különböznek és a szorzatuk 1, így közülük a nagyobb 1-nél nagyobb. Mivel a vizsgált számok közül a további kettő negatív, ezért a kiválasztott ε-ra $\varepsilon > 1$ teljesül. $\varepsilon \cdot \overline{\varepsilon} = 1$ miatt $\overline{\varepsilon} < 1$ és ε pozitivitásából $\overline{\varepsilon} > 0$ következik. Az egyenlőtlenségek negatív számmal való szorzási szabályából már következik a $-\varepsilon < -1 < \overline{\varepsilon} < 0$ összefüggés.

16. feladat. Legyen $\varepsilon = a + b\sqrt{D} \in Z[\sqrt{D}]$ olyan, amelyre $N(\varepsilon) = 1$. Bizonyítsuk be, hogy $\varepsilon > 1$ pontosan akkor teljesül, ha a és b mindegyike pozitív.

Megoldás. Ha $\varepsilon = a + b\sqrt{D} \in Z[\sqrt{D}]$ olyan, hogy a, $b > 0$, akkor nyilvánvalóan teljesül az is, hogy $\varepsilon > 1$. Tekintsük másrészt ε-nal együtt az $\overline{\varepsilon}$, $-\varepsilon$, $-\overline{\varepsilon}$ elemeket, ezek: $a + b\sqrt{D}$, $a - b\sqrt{D}$, $-a - b\sqrt{D}$, $-a + b\sqrt{D}$. Mivel a és $-a$, továbbá b és $-b$ valamelyike pozitív, ezért a négy szám valamelyike pozitív u és v egészekkel, $u + v\sqrt{D}$ alakú. Világos, hogy ezek között éppen ez a legnagyobb, és a 15. feladat állítása szerint ez közülük az egyetlen, amelyik 1-nél nagyobb, tehát ez éppen a kiválasztott ε. Így $\varepsilon = u + v\sqrt{D}$, ahol u, v pozitívak.

17. feladat. Bizonyítsuk be, hogy azok között a $Z[\sqrt{D}]$-beli ε számok között, amelyekre $N(\varepsilon) = 1$, és $\varepsilon > 1$, van egy ε_1 legkisebb.

Megoldás. A feltételnek eleget tevő $a + b\sqrt{D}$ számok közül válasszuk ki az $a_1 + b_1\sqrt{D}$-t úgy, hogy a_1 minimális legyen. Ilyen létezik, hiszen a csak pozitív egész lehet. Ekkor $a_1^2 - b_1^2 D = 1 = a^2 - b^2 D$ következtében $(b^2 - b_1^2)D = a^2 - a_1^2 > 0$, és mivel b_1 és b pozitiv ezért $b_1 < b$. Így $a_1 + b_1\sqrt{D} < a + b\sqrt{D}$, vagyis $\varepsilon_1 = a_1 + b_1\sqrt{D}$ eleget tesz a kirótt feltételnek.

Megjegyzés. A feladat állítása egy sokkal általánosabb tételből is következik. Tekintsük az $a_1, \ldots, a_n$ szám-n-eseket, amelyeknek elemei pozitív egészek, és minden ilyen szám-n-eshez rendeljük hozzá a $\mu(a_1, \ldots, a_n)$ valós számot úgy, hogy

1. Ha $b_1 \leq a_1, \ldots, b_n \leq a_n$, akkor

$$\mu(b_1, \ldots, b_n) \leq \mu(a_1, \ldots, a_n).$$

2. $a_i \leq \mu(a_1, \ldots, a_n)$ minden i-re $(1 \leq i \leq n)$.

Ekkor a fenti szám-n-esek bármely H részhalmazában van olyan $(b_1, \ldots, b_n)$, hogy tetszőleges H-beli $(a_1, \ldots, a_n)$ esetén $\mu(b_1, \ldots, b_n) \leqq (a_1, \ldots, a_n)$. [Pl. ilyen μ lehet $\mu(a_1, \ldots, a_n) = a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n$, 1-nél nem kisebb α_i valós számokkal. A feladat ennek speciális esete.]

Az állítást a következőképpen láthatjuk be. Legyen $c_i, \ldots, c_n$ a H tetszőleges eleme és legyen N egy, a $\mu(c_1, \ldots, c_n)$ számnál nagyobb természetes szám. Ha mármost $\mu(a_1, \ldots, a_n) \leq \mu(c_1, \ldots, c_n)$, akkor az 1. és 2. feltételek szerint minden egyes a_i kisebb N-nél. Az a_i-k pozitivitása miatt ilyen $(a_i, \ldots, a_n)$ legfeljebb N^n van, mert minden egyes a_i-re legfeljebb N lehetőség van. Így a H halmazban is csak véges sok olyan $(a_i, \ldots, a_n)$ szám-n-es van, amelyre $\mu(a_1, \ldots, a_n) \leq \mu(c_1, \ldots, c_n)$. E véges sok között van tehát olyan $(b_1, \ldots, b_n)$, amelyre $\mu(b_1, \ldots, b_n)$ minimális. Ez a $b_1, \ldots, b_n$ viszont az egész H halmazban megfelelő lesz. Ha ugyanis a $(d_1, \ldots, d_n)$ szám-n-es nem tartozik a kiválasztottak közé, akkor $\mu(d_1, \ldots, d_n) > \mu(c_1, \ldots, c_n)$; ami, $\mu(b_1, \ldots, b_n) \leq \mu(c_1, \ldots, c_n)$ alapján bizonyítja az állítást.

18. feladat. Bizonyítsuk be, hogy a 17. feladatban szereplő ε_1 számra bármilyen k egész szám esetén $\varepsilon_k = (\varepsilon_1)^k$ eleme $Z[\sqrt{D}]$-nek és $N(\varepsilon_k) = N(-\varepsilon_k) = 1$.

Megoldás. Ha k pozitív, akkor $(\varepsilon_1)^k \in Z[\sqrt{D}]$ abból következik, hogy $Z[\sqrt{D}]$ a szorzásra zárt. Ha k negatív egész szám, akkor $\varepsilon\overline{\varepsilon} = 1$ alapján $(\varepsilon_1)^k = \overline{[(\varepsilon_1)^{-k}]} \in Z[\sqrt{D}]$. A $k = 0$ esetén azt kell bizonyítani, hogy $1 \in Z[\sqrt{D}]$, ami igaz. A további állítás triviálisan következik abból, hogy $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$ és $N(-1) = 1$.

19. feladat. Bizonyítsuk be, hogy a 18. feladatban definiált

$$\ldots,\ \varepsilon_{-k}\ldots,\ \varepsilon_{-1},\ \varepsilon_0,\ \varepsilon_1,\ \ldots,\ \varepsilon_k,\ \ldots$$
$$\ldots,\ -\varepsilon_{-k},\ \ldots,\ -\varepsilon_{-1},\ -\varepsilon_0, -\varepsilon_1,\ \ldots,\ -\varepsilon_k,\ \ldots$$

számok valamennyien különböznek egymástól.

Megoldás. A 17. feladat állítása szerint $\varepsilon_1 > 1$. Így pozitív k egész számra

$$1 = \varepsilon_0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \ldots \varepsilon_k \ldots$$

E számok tehát különböznek egymástól. Mivel különböző számok reciproka is és negatívja is különböző, ezért az

$$\varepsilon_{-1},\ \ldots,\ \varepsilon_{-k},\ \ldots$$
$$-\varepsilon_0,\ -\varepsilon_1,\ \ldots,\ -\varepsilon_k,\ \ldots$$
$$-\varepsilon_{-1},\ \ldots,\ -\varepsilon_{-k},\ \ldots$$

sorozatok is csupa különböző számokból állnak. A 15. feladat állítása szerint pedig a különböző sorozatok sem tartalmazhatnak egyező számokat.

A Pell–féle egyenlet összes megoldásának a meghatározása

Mint beláttuk, léteznek olyan p és q egész számok, amelyek a

$$\text{(P)} \qquad x^2 - Dy^2 = 1$$

Pell–féle egyenletnek nem triviális megoldását adják, ami azt jelenti, hogy $q \neq 0$ és $p^2 - Dq^2 = 1$. A IV. sorozatban azt is beláttuk, hogy a (P) egyenletnek végtelen sok megoldása van. Tekintsük ugyanis a 17. feladatban szereplő $\varepsilon_1 = p_1 + g_1\sqrt{D}$ számot. Az $\varepsilon_1 \in Z[\sqrt{D}]$ feltétel azt jelenti, hogy p_1 és q_1 egészek; az $N(\varepsilon_1) = 1$ összefüggés biztosítja, hogy p_1, q_1 a (P) egyenlet megoldásai; míg $\varepsilon_1 > 1$ következtében a kapott megoldás nem lehet triviális. Ebből még nem következne az, hogy a (P) egyenletnek végtelen sok megoldása van. A 19. feladat állításából viszont már ez is adódik. Az ott szereplő számok ugyanis a 18. feladat alapján mind a (P) egyenlet egy–egy megoldását adják (a $p + q\sqrt{D}$ által kapott megoldásban az $x = p$, $y = q$). E megoldások mind különbözőek; éppen a 19. feladat állítása szerint; továbbá közülük kettő, nevezetesen ε_0 és $-\varepsilon_0$, a triviális $(1,\ 0)$ és $(-1,\ 0)$ megoldást adja, a többiek nem triviális megoldást adnak. Világos azonban, hogy a végtelen sok megoldás meghatározásánál nem használtak ki a 17. feladat állítása szerint az ε_1-re kirótt feltételt. Erre a feltételre éppen most lesz szükségünk, annak a kimutatására, hogy a 19. feladatban szereplő számok a (P) összes megoldását meghatározzák. E célt szolgálják a 20., 21. és 22. feladatok. Ebben a folytatásban azonban szeretnénk teljesíteni még egy ígéretünket is. Említettük ugyanis, hogy rögzített k mellett az $a^2 - Db^2 = k$ megoldásai bizonyos értelemben periodikusan következnek. Ezt fogjuk pontosan megfogalmazni a 23. és 24. feladatban.

V. sorozat (az összes gyök meghatározása)

Feladatok

20. Legyen $\varepsilon > 1$ a $Z[\sqrt{D}]$-nek olyan elemé, amelyre $N(\varepsilon) = 1$. Bizonyítsuk be, hogy a 17. feladatban értelmezett ε_1 számhoz található olyan k természetes szám, amelyre

$$(\varepsilon_1)^k \leq \varepsilon < (\varepsilon_1)^{k+1}.$$

21. Bizonyítsuk be, hogy ha ε olyan eleme $Z[\sqrt{D}]$-nek, amelyre $N(\varepsilon) = 1$, akkor valamilyen k egész számra teljesül az $\varepsilon = \varepsilon_k$ vagy az $\varepsilon = -\varepsilon_k$ egyenlőségek valamelyike, ahol ε_k a 18. feladatban adott definíció szerint egyenlő $(\varepsilon_1)^k$-nal.

22. Legyen a 18. feladatban szereplő ε_k-ra $\varepsilon_k = p_k + q_k\sqrt{D}$; nem negatív k esetén. Bizonyítsuk be, hogy az

$$\text{(P)} \qquad x^2 - Dy^2 = 1$$

Pell–féle egyenlet összes (egész) megoldásai:

$$x = \pm p_k, \quad y = \pm q_k.$$

23. Legyen az $\alpha = a + b\sqrt{D} \in Z[\sqrt{D}]$ számra $\alpha > 1$ és $N(\alpha) = k$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor létezik olyan $\alpha_0 = a_0 + b_0\sqrt{D}$, amelyre $1 < \alpha_0 < \varepsilon_1$ és $\alpha = \alpha_0(\varepsilon_1)^k$ valamely nem negatív k egész számmal; ahol ε_1 a 17. feladatban definiált szám. (Igaz-e, hogy mind a_0, mind b_0 pozitívak?)

24. Hogyan állítható elő az $x^2 - Dy^2 = k$ egyenlet összes egész $(a,\ b)$ megoldása?