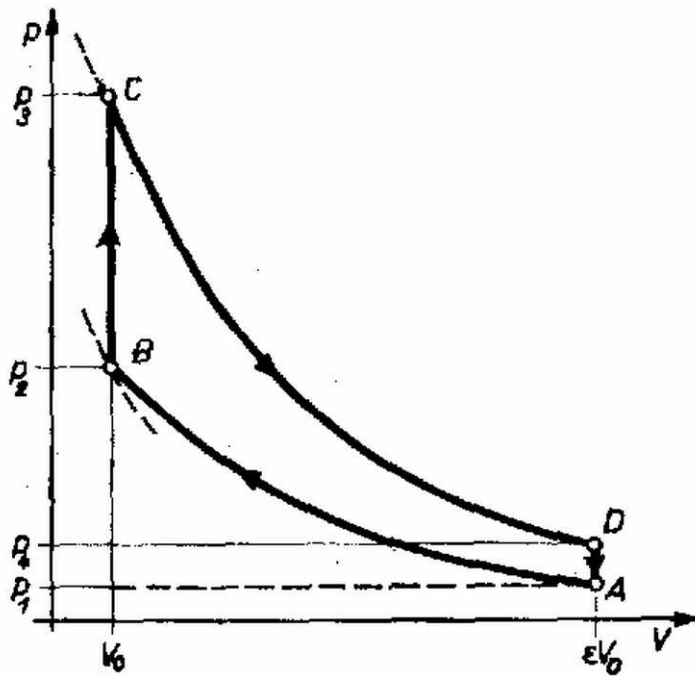


1. Egy négyütemű motor kompresszióviszonya $\varepsilon = 9,5$. A motor 27°C hőmérsékletű, εV_0 térfogatú levegőt és benzingőzt szív be 100 kPa nyomáson (1. ábra). Ezután sűrítés következik, az állapotábrán az A pontból a B pontba adiabatikusan jutunk el ($x = 1,4$). A robbanáskor ($B - C$) a nyomás megkétszereződik. A dugattyú kilökése közben ($C - D$) a gázkeverék adiabatikusan terjed ki εV_0 térfogatra. A kipufogószelep kinyílásakor a nyomás visszaesik a kezdeti 100 kPa értékre. A kompresszióviszony a henger legnagyobb és legkisebb térfogatának az arányát jelenti.

- Határozzuk meg a nyomás és hőmérséklet értékeit az A, B, C és D állapotokban!
- Mennyi a körfolyamat elméleti hatásfoka?



1. ábra

Megoldás. Az adiabatikus állapotváltozás egyenlete ideális gázra

$$TV^{x-1} = \text{állandó}.$$

a) Az A állapotban a nyomás $P_1 = 100\text{ kPa}$, a térfogat εV_0 , a hőmérséklet $T_1 = 300\text{ K}$; a B állapot jellemzői p_2 , V_0 , T_2 . Az adiabata egyenlete

$$T_1(\varepsilon V_0)^{x-1} = T_2 V_0^{x-1},$$

amiből $T_2 = 738,3\text{ K}$. Az ideális gáz állapotegyenletéből ($pV/T = \text{állandó}$) meghatározhatjuk a B állapotban levő gáz nyomását:

$$p_2 = 2,34\text{ MPa}.$$

A C állapotban a nyomás $p_3 = 2p_2 = 4,68\text{ MPa}$, a térfogat V_0 , a hőmérsékletet pedig az állapotegyenletből fejezhetjük ki: $T_3 = 1476,6\text{ K}$.

A D állapot paramétereit (p_4 , εV_0 , T_4) ismét az adiabatikus állapot. változás egyenletéből, illetve az állapotegyenletből kaphatjuk meg: $T_4 = 600\text{ K}$; $p_4 = 2\text{ kPa}$.

b) A hatásfokot megadó tört nevezője a B – C lépésben felvett hő, mert ezt kell az üzemanyag elégetésével biztosítani. A felvett hő a gáz energiájának növekedésével egyenlő, mert a térfogat változatlan, és így nincs munkavégzés. Tehát a felvett hő $c_v m(T_3 - T_2)$. A mechanikai munka alakjában hasznosított energia a B – C lépésben felvett és a D – A lépésben visszaadott hő különbsége:

$$c_v m(T_3 - T_2) - c_v m(T_4 - T_1) = c_v m(T_1 + T_3 - T_2 - T_4).$$

A hatásfok:

$$\eta = \frac{c_v m(T_1 + T_3 - T_2 - T_4)}{c_v m(T_3 - T_2)} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}.$$

Mivel $T_3 = 2T_2$ és $T_4 = 2T_1$, a hatásfok egyszerűen

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}.$$

Az $A - B$ folyamatra felírt adiabata egyenletéből $T_1/T_2 = \varepsilon^{1-x}$, tehát a négyütemű benzinmotor hatásfoka:

$$\eta = 1 - \varepsilon^{1-x}.$$

A hatásfok csak a kompresszióviszonytól függ, azaz a hatásfokra vonatkozó $b)$ kérdésre az $a)$ alatti adatok kiszámítása nélkül is felelhetünk.

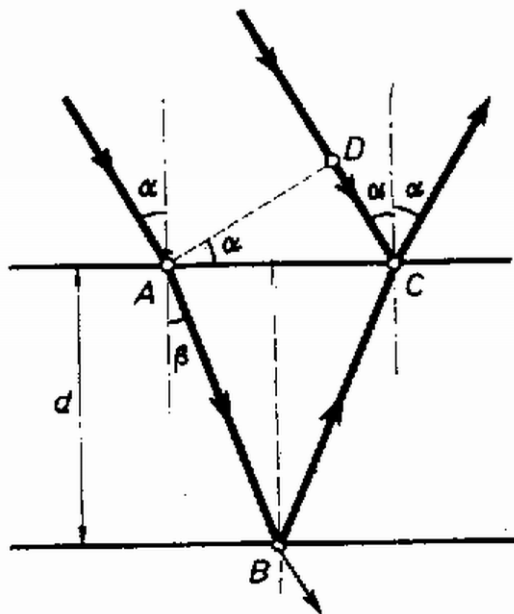
Számadatainkkal $\eta = 0,59 = 59\%$. A valóságos hatásfok alig több, mint ennek a fele, mert sok hő távozik el a körfolyamatban való részvétel nélkül.

2. Egy szappanhártyát $\alpha = 30^\circ$ -os beesési szögben fehér fénnel világítunk meg. A visszavert fényt túlnyomó részben $\lambda_0 = 0,5 \mu\text{m}$ hullámhosszú élénk zöld színben látjuk.

a) Mennyi a hártya lehetséges legkisebb vastagsága?

b) Milyen színűnek látszik ez a hártya merőleges irányból? A folyadék törésmutatója $n = 1,33$.

Megoldás. $a)$ A rétegbe bemenő, az A pontban megtört fény egy része B -ben visszaverődik, C -ben a levegőbe kilépve ismét megtörik, és az elég messze levő szemünkbe jut (2. ábra). A fényforrásból érkező DC sugár egy része is visszaverődik és az előbbi sugárral együtt jut a szemünkbe.



2. ábra

Az AD síkba az egész sugárnyaláb egyező fázissal érkezik. Az a kérdés, mekkora az útkülönbség, illetve a fáziskülönbség az alsó és felső határfelületekről érkező sugarak között, mert ettől függ, hogy az interferencia által erősítés vagy gyengítés jön-e létre, és a fehér fény különböző hullámhosszúságú fényei közül teljes intenzitással mi marad meg.

Az alul visszaverődő fénysugár útja A -tól C -ig $\overline{AB} + \overline{BC} = 2d/\cos \beta$. A közegben a hullámhossz λ_0/n , tehát ezen az úton az A -tól C -ig elférő hullámok darabszáma:

$$\frac{2d}{\lambda_0(\cos \beta)/n} = \frac{2dn}{\lambda_0 \cos \beta}.$$

A felül visszaverődő fénysugár útja D -tól C -ig:

$$\begin{aligned} \overline{DC} &= \overline{AC} \sin \alpha = 2d \tan \beta \sin \alpha = \\ &= 2d \sin \beta \sin \alpha / \cos \beta. \end{aligned}$$

Ezen a távolságon a λ_0 hullámhosszból $2d \sin \beta \sin \alpha / (\lambda_0 \cos \beta)$ darab fér el, de a nagyobb törésmutatójú anyagon történő visszaverődéskor 180° -os fázisugrás történik, tehát a DC távolságon elférő hullámok száma:

$$\frac{2d \sin \beta \sin \alpha}{\lambda_0 \cos \beta} + \frac{1}{2}.$$

Erősítés akkor jön létre, ha a hullámok számának különbsége valamilyen k egész szám:

$$\begin{aligned} k &= \frac{2dn}{\lambda_0 \cos \beta} - \frac{2d \sin \beta \sin \alpha}{\lambda_0 \cos \beta} - \frac{1}{2} = \frac{2dn}{\lambda_0 \cos \beta} (1 - \sin^2 \beta) - \frac{1}{2} = \frac{2dn \cos \beta}{\lambda_0} - \frac{1}{2} = \\ &= \frac{2d}{\lambda_0} \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ennek átalakítása után az erősítés feltétele:

$$\frac{4d}{\lambda_0} \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} = 2k + 1.$$

A törésmutatótól és a geometriai adatoktól függ, hogy mely hullámhosszra következik be a legnagyobb erősítés. Az ezzel szomszédos hullámhosszúságú fények sem oltódnak ki egészen, csak gyengülnek, tehát nem kapunk monokromatikus fényt. Ha k növekszik, a szín mindig kevésbé teltebb lesz, mert az egyik rendben való erősítést egy másik rendben történő gyengítés lerontja. Valamelyest vastagabb lemeznél szürkét kapunk. Ezért van az, hogy a „vékony lemezek színei” csak vékony lemezeknél látszanak. Feladatunk élénk zöldet említ és a legvékonyabb hártya iránt érdeklődik, tehát $k = 0$ veendő és a rétegvastagság:

$$d = \frac{\lambda_0}{4\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} = 0,101 \mu\text{m}.$$

Megjegyzés. Ez a hártya olyan vékony, hogy egy $2 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm}$ méretű keretbe férő tömege csak $0,06 \text{ mg}$ lenne, a szokásos analitikai mérleggel nem volna megbízhatóan lemérhető.

b) Merőleges beesésnél, $k = 0$ esetében a legjobban erősített hullámhossz $\lambda_b = 4d\sqrt{n^2 - \sin^2 0} = 4dn$ volna. Az előbbi d -értéket felhasználva:

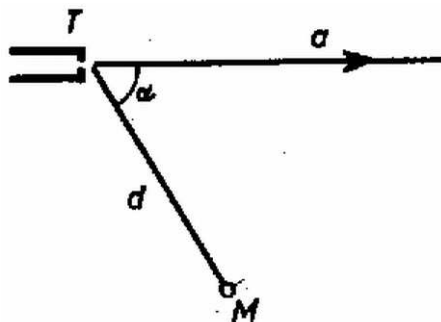
$$\lambda_b = \lambda_0 \cdot \frac{n}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} = \frac{\lambda_0}{\cos \beta}.$$

d -től függetlenül így lehet az α -hoz tartozó λ_0 -ból a merőleges beeséshez tartozó λ_b -t kiszámítani. A mi esetünkben $\lambda_b = 1,079 \lambda_0 = 0,540 \mu\text{m}$, ami sárgásabb árnyalatú zöld színt jelent. De nemcsak a szemünket kell bevinni a beesési merőlegesbe, hanem lehetőleg a fényforrást is. A vékony lemezek színeinek vizsgálatakor éppen ezért nagy felületű, diffúz fényforrás célszerű, mint amilyen a borús ég, amikor eső után nézzük a pocsolyán az olajfoltokat.

3. Egy elektronágyú $U = 1000 \text{ V}$ feszültséggel gyorsított elektronokat bocsát ki az „a” egyenes irányában (3. ábra). Az ágyútól $d = 5 \text{ cm}$ távolságban, $\alpha = 60^\circ$ -os irányban levő M céltárgyat akarjuk eltalálni. Ennek érdekében B indukciójú homogén mágneses teret alkalmazunk. Mekkora legyen ennek az erőssége,

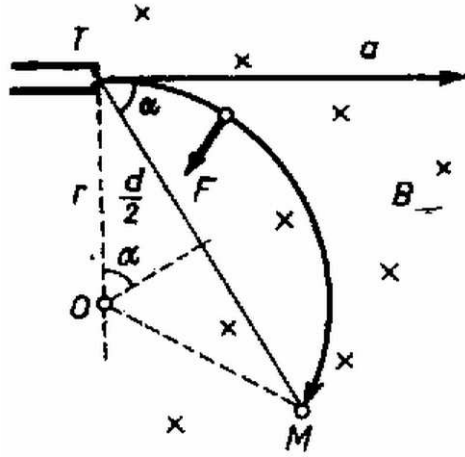
a) ha a mágneses térerősség merőleges az „a” egyenes és az M pont által meghatározott síkra;

b) ha a mágneses térerősség párhuzamos a TM iránnyal? Az elektron töltése $Q = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, tömege $m = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$.



3. ábra

Megoldás. a) A v sebességgel repülő elektront a merőleges irányú, B indukciójú homogén mágneses tér r sugarú körpályára tereli. E mozgáshoz szükséges mv^2/r erőt a BvQ nagyságú Lorentz-erő szolgáltatja. Homogén, állandó mágneses tér nem képes az elektron sebességének nagyságát megváltoztatni, mert az erő mindig merőleges a sebességre. A mi esetünkben a körpálya sugara a 4. ábra szerint $r = d/(2 \sin \alpha)$.



4. ábra

Az elektronágyúból kirepülő elektron sebessége $mv^2/2 = UQ$ alapján a $v = \sqrt{2UQ/m}$. A Lorentz-erő figyelembevételével

$$\frac{mv^2}{r} = BvQ.$$

Innen a szükséges mágneses indukció:

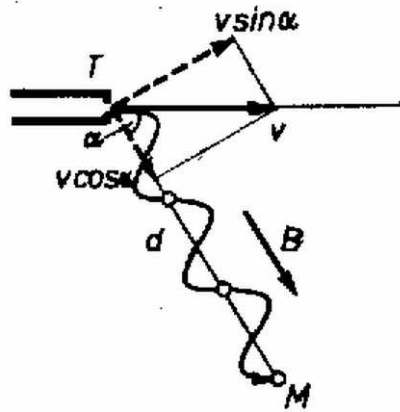
$$B = \frac{mv}{rQ}.$$

Felhasználva a sugár geometriai kifejezését és a sebesség értékét:

$$B = \frac{2 \sin \alpha}{d} \sqrt{\frac{2Um}{Q}}.$$

Számadatainkkal $B = 0,0037$ tesla.

b) Ebben az esetben az elektronágyúból kirepülő elektron sebességét felbontjuk a B mágneses indukció irányába eső $v \cos \alpha$ és az erre merőleges $v \sin \alpha$ összetevőre (5. ábra).



5. ábra

A $v \cos \alpha$ összetevőre hatástalan a mágneses tér. Ezzel a sebességgel az elektron $d/(v \cos \alpha)$ idő alatt ér el az M célba.

Vizsgáljuk a mozgást olyan koordináta-rendszerből, amely $v \cdot \cos \alpha$ sebességgel halad a TM irányban. Az elektron ebben a koordináta-rendszerben $v \cdot \sin \alpha$ sebességgel körpályán mozog, amelynek sugara $mv^2 \sin^2 \alpha / r = BQv \sin \alpha$ alapján

$$r = mv \sin \alpha / (QB).$$

(Az elektron valójában spirálisan ír le.) M eltalálása akkor sikerül, ha az elektron k egész számú kört ír le az M -be való érkezés $d/(v \cos \alpha)$ ideje alatt. A kör kerülete $2\pi r = 2\pi mv \sin \alpha / (QB)$, egy körülfordulás ideje, tekintettel a körön való futás $v \sin \alpha$ sebességére:

$$\frac{2\pi mv \sin \alpha}{QBv \sin \alpha} = \frac{2\pi m}{QB}.$$

Ennek egész számú többszöröse $d/(v \cos \alpha)$:

$$\frac{d}{v \cos \alpha} = k \cdot \frac{2\pi m}{QB}.$$

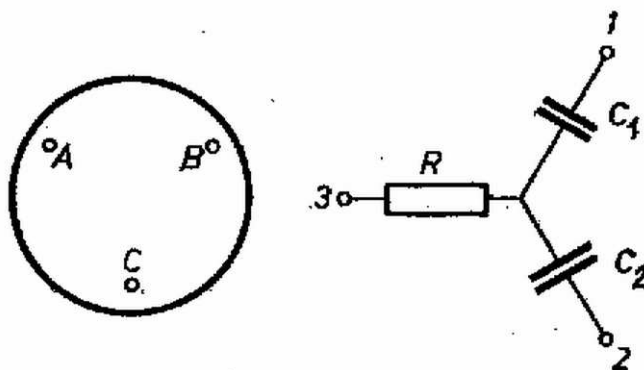
Innen a szükséges mágneses indukció:

$$B = k \cdot \frac{2\pi m \cos \alpha}{dQ} \cdot v = k \cdot \frac{2\pi \cos \alpha}{d} \sqrt{\frac{2Um}{Q}}.$$

Lényegtelen, hogy a mágneses indukció az adott irányban előre vagy hátra mutat, ettől csak a spirális menetiránya függ. $k = 1$ esetében a spirális 1 menetével, $k = 2$ -nél 2-vel érjük el a célt stb. Számadatainkkal: $B = k \cdot 0,0067$ tesla.

Kísérleti feladat. Adva van egy fekete doboz A , B , C egyforma csatlakozásokkal, benne csillagkapcsolásban R ellenállás és C_1 , C_2 kapacitású kondenzátorok vannak (6. ábra). Megállapítandó az ellenállás és a kapacitások nagysága!

Rendelkezésre áll egy generátor, amely 0,1 kHz és 10 kHz között ismert frekvenciájú váltófeszültséget ad, azonkívül egy-egy váltóáramú ampermérő és voltmérő. Ezekkel az egyes dugók között lemérhetjük a feszültséget és áramerősséget, így megtudhatjuk az impedanciát és megvizsgálhatjuk az impedanciának a frekvenciától való függését.



6. ábra

Megoldás. Először meg kell tudni, a dugók közül melyik az, amelyikhez az ellenállás csatlakozik. A másik két dugó között tiszta (eredő) kapacitás található, amelyre nézve az impedancia és frekvencia fordítottan arányos. Tehát egy-egy impedanciamérést végzünk 0,1 kHz-nél és 10 kHz-nél, és amelyik dugópár esetében az impedancia és a frekvencia fordítottan arányos, azokhoz vezetnek a kondenzátorok (legyenek ezek az 1 és 2 csatlakozások). Ezután többféleképpen dolgozhatunk tovább.

a) Egy bizonyos frekvenciánál lemérjük az 1 és 2 kivezetések között a sorba kapcsolt kondenzátorok eredő impedanciáját:

$$(1) \quad Z = \frac{1}{\omega C_1} + \frac{1}{\omega C_2}.$$

Ezután lemérjük 1–3, valamint 2–3 között az ellenállás és kondenzátor eredő impedanciáját: Z_1 -et és Z_2 -t, amelyekre

$$(2) \quad Z_1^2 = R^2 + \left(\frac{1}{\omega C_1} \right)^2,$$

$$(3) \quad Z_2^2 = R^2 + \left(\frac{1}{\omega C_2} \right)^2.$$

Egyenletrendszert kaptunk R , C_1 , C_2 -re. Ebből a kapacitások:

$$\frac{1}{C_1} = \frac{\omega}{2Z} (Z^2 + Z_1^2 - Z_2^2),$$

$$\frac{1}{C_2} = \frac{\omega}{2Z} (Z^2 - Z_1^2 + Z_2^2).$$

Ismerve C_1 és C_2 nagyságát (2) vagy (3) könnyen megadja az R ellenállást.

b) Az 1 és 2 kivezetéseket összekapcsoljuk (a kapacitások most összegeződnek), azután két különböző frekvenciánál mérjük le az impedanciát 3 és az egyesített 1–2 között:

$$Z_a^2 = R^2 + \frac{1}{\omega_a^2 (C_1 + C_2)^2},$$

$$Z_b^2 = R^2 + \frac{1}{\omega_b^2 (C_1 + C_2)^2}.$$

Az egyenletrendszerből $C_1 + C_2$ kapacitásösszeget kiküszöbölve kapjuk az ellenállásra:

$$R^2 = \frac{\omega_a^2 Z_a^2 - \omega_b^2 Z_b^2}{\omega_a^2 - \omega_b^2}.$$

R ismeretében a (2) és (3) egyenletekkel számíthatók a kapacitások.

c) Ha elegendően kicsiny frekvenciával mérünk, akkor R elhanyagolható $1/\omega C_1$, illetve $1/\omega C_2$ mellett és az impedanciákból rögtön számolhatjuk C_1 -et és C_2 -t. Ezután igen nagy frekvenciával mérve a kondenzátorok ellenállása hanyagolható el és az R ellenállást kapjuk meg.

d) Ha felrajzoljuk az 1 – 3 és 2 – 3 közötti impedanciáknak a frekvenciától való függését, akkor a frekvenciát növelve mindkét görbe közös aszimptotája adja meg az R ellenállást. Ennek ismeretében a (2) és (3) egyenletekből megkaphatók a kapacitások.