

I. forduló

1. Mutassuk meg, hogy ha az n természetes szám, akkor az

$$A = (10^n + 10^{n-1} + \dots + 10 + 1)(10^{n+1} + 5) + 1$$

szám mindig négyzetszám.

2. Jelöljük a konvex $ABCD$ négyszög AC , BD átlójának felezőpontjait rendre E -vel, F -fel. Bizonyítsuk be, hogy ha $2EF = AD - BC$, akkor AD párhuzamos BC -vel.

3. Legyen a , b tetszőleges pozitív, c tetszőleges valós szám. Határozzuk meg azt az x -et, amelyre

$$3a^{2x} - b^{2x} = ca^xb^x.$$

4. Hány oldalú szabályos sokszögben lehet metszeni egy kockát?

5. Legyen a_n az összes, a tízes számrendszerben legfeljebb n jegyű, nem negatív egész számok száma, b_n pedig ezek közül azoknak a száma, amelyek tízes számrendszerbeli alakjában van ötös számjegy. Adjuk meg a_n -et és b_n -et n függvényeként, és a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ határértéket!

6. Mutassuk meg, hogy van olyan k természetes szám, amelyre

$$1976 < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} < 1977.$$

7. Legyen e az ABC háromszög síkjának tetszőleges egyenese. Jelöljük az A , B , C pontoknak az e egyenesen levő merőleges vetületét A_1 -gyel, B_1 -gyel, C_1 -gyel, továbbá az A_1 -en átmenő, BC -re merőleges egyenest a_1 -gyel, a B_1 -en átmenő, CA -ra merőleges egyenest b_1 -gyel, a C_1 -en átmenő, AB -re merőleges egyenest c_1 -gyel. Bizonyítandó, hogy a_1 , b_1 , c_1 egy ponton megy át.

8. $n \geq 4$ különböző (pozitív) prímszámról tudjuk, hogy közülük bármelyik három összege is prímszám. Mekkora az n szám?

II. forduló

Szakközépiskolák, valamint gimnáziumok általános tantervű osztályai tanulóinak

1. Adott a sík négy különböző pontja: A , B , C és S . Legyen a sík tetszés szerinti P pontjának az A -ra vonatkozó tükörképe P_1 ; P_1 -nek az S pontra vonatkozó tükörképe P_2 ; P_2 -nek a B pontra vonatkozó tükörképe P_3 ; P_3 -nak megint az S pontra vonatkozó tükörképe P_4 ; P_4 -nek a C pontra vonatkozó tükörképe P_5 ; végül P_5 -nek ismét az S pontra vonatkozó tükörképe P_6 .

Bizonyítsuk be, hogy P_6 akkor és csak akkor azonos a P ponttal, ha S az ABC háromszög súlypontja!

2. Bizonyítsuk be, hogy minden $2(n^2 + n + 1)$ alakú szám reciprok értéke – ahol n pozitív egész számot jelent – előállítható az

$$a_k = \frac{1}{k(k+1)(k+2)} \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

sorozat – bizonyos számú, nem feltétlenül az elsővel kezdődő – egymás után következő tagjainak összegeként!

3. Jelölje rendre α , β , γ egy háromszög szögeinek mérőszámát!
- Mekkora a $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma$ összeg lehető legnagyobb értéke?
 - Mely háromszögben veszi fel ez az összeg a legnagyobb értékét?
 - Bizonyítsuk be, hogy minden háromszögben

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma > 1.$$

- d) Bizonyítsuk be végül, hogy van olyan háromszög, amelyre

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma < 1 + \varepsilon,$$

ahol ε tetszés szerinti kicsire választható, rögzített pozitív számot jelent!

A gimnáziumok matematika I. szakosított tantervű osztályainak tanulói részére

1. Az ABC szabályos háromszög egy belső P pontjának az oldalakra vonatkozó tükörképei rendre X , Y és Z . Bizonyítsuk be, hogy az XYZ háromszög területe nem lehet nagyobb az ABC háromszög területénél!

2. Bizonyítsuk be, hogy

$$(k+n)(1+x^k) \geq 2n \frac{1-x^{k+n}}{1-x^n},$$

ha x 1-től különböző nem negatív szám, $k \geq n \geq 1$ pedig egész számok.

3. Legyen A egy egész számokból álló halmaz, és B egy, ugyancsak egészekből álló kételemű halmaz! E két halmaz olyan tulajdonságú, hogy minden egész szám egyértelműen állítható elő egy A -beli és egy B -beli szám összegeként.

Bizonyítsuk be, hogy mindazok az egész számok, amelyek nem állíthatók elő két (nem feltétlenül különböző) A -beli szám különbségeként, ugyanannak az egésznek páratlan többszörösei.

A gimnáziumok matematika II. szakosított tantervű osztályainak tanulói részére

1. Adott egy háromszög. Határozzuk meg a belsejében – esetleg valamelyik oldalán – azt a pontot, amelynek az oldalakra vonatkozó tükörképei által meghatározott háromszög területe maximális!

2. Bizonyítsuk be, hogy az $\{a_n = x + n; n = 1, 2, \dots\}$ sorozathoz akkor és csak akkor találhatók olyan i, j, k indexek, amelyekre $a_i a_j = a_k^2$, ha x racionális.

3. Adott egy egységnyi élű kocka belsejében vagy felületén száz pont.

Bizonyítsuk be, hogy ki lehet választani közülük olyan négy pontot, amelyek által meghatározott tetraéder térfogata nem nagyobb $1/99$ -nél.