Ramanujan eddig legjelentősebbnek bizonyult felfedezése paradox módon egy hibás állítása kapcsán jött napvilágra, ismét egy példát adva, hogy zseniális emberek hibái olykor termékenyebbek, mint közepesek egyes korrekt munkái. Ennek megvilágítása némi előkészületeket igényel. Ha x tetszőleges, akár komplex szám, úgy

$$(1-x)(1+x+x^2+\ldots+x^k)=1-x^{k+1},$$

azaz

$$1+x+x^2+\ldots+x^k=\frac{1-x^{k+1}}{1-x},$$

ahol k tetszőleges egész szám és $x\neq 1$. Ebből egy pontosan meghatározott értelemben adódik,[1] hogy ha $|x|<1$, úgy

$$1+x+x^2+\ldots+x^k+\ldots=\frac{1}{1-x}. \tag{1}$$

Ha $|x|<1$, akkor $|x^3|<1$ is igaz, azaz (1) alkalmazható x helyett x^3-nal. Így adódik

$$1+x^3+x^6+\ldots+x^{3k}+\ldots=\frac{1}{1-x^3}, \tag{2}$$

vagy még x-szel, ill. x^2-tel szorozva, $|x|<1$-re adódik

$$x+x^4+\ldots+x^{3k+1}+\ldots=\frac{x}{1-x^3} \tag{3}$$

és

$$x^2+x^5+\ldots+x^{3k+2}+\ldots=\frac{x^2}{1-x^3}. \tag{4}$$

Fenti formulákat fel lehet fogni egyrészt, hogy a bal oldalon álló végtelen sorok számértékét fix $|x|<1$-re egyszerű zárt alakban megadja a jobb oldal. Másrészt azonban úgy is lehet érteni – ramanujanszerű heurisztikával –, hogy a jobb oldalakon levő „törteket” kifejezzük „x alapú szám rendszerben”. – Szükségünk lesz a komplikáltabbnak látszó

$$\frac{2+x}{1+x+x^2}$$

előállítására is. Mivel $|x|<1$-re

$$\begin{aligned}\frac{2+x}{1+x+x^2}&=\frac{(2+x)(1-x)}{(1+x+x^2)(1-x)}=\frac{2-x-x^2}{1-x^3}=2\frac{1}{1-x^3}-\frac{x}{1-x^3}-\frac{x^2}{1-x^3}=\\&=2\ \cos\left(0\cdot\frac{2\pi}{3}\right)\cdot\frac{1}{1-x^3}+2\cos\left(1\cdot\frac{2\pi}{3}\right)\cdot\frac{x}{1-x^3}+2\cos\left(2\cdot\frac{2\pi}{3}\right)\cdot\frac{x^2}{1-x^3},\end{aligned}$$

tehát (2), (3), (4) alkalmazható. Így rögtön látható, hogy $|x|<1$-re

$$2\cos\left(0\cdot\frac{2\pi}{3}\right)+2\cos\left(1\cdot\frac{2\pi}{3}\right)\cdot x+\ldots+2\cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{3}\right)\cdot x^k+\ldots=\frac{2+x}{1+x+x^2}. \tag{5}$$

Az (1) formula bal oldalán x hatványai állanak úgy, hogy mindegyik együttható 1. Nem nehéz (1)-ből levezetni, hogy $|x|<1$ mellett

$$1+2x+3x^2+\ldots+(k+1)x^k+\ldots=\frac{1}{(1-x)^2},$$

amit írjunk binomiális együtthatókkal

$$\binom{1}{1}+\binom{2}{1}x+\binom{3}{1}x^2+\ldots+\binom{k+1}{1}x^k+\ldots=\frac{1}{(1-x)^2} \tag{6}$$

alakba. Hasonlóan $|x|<1$-re nyerhető, hogy

$$\binom{2}{2}+\binom{3}{2}x+\ldots+\binom{k+2}{2}x^k+\ldots=\frac{1}{(1-x)^3}. \tag{7}$$

[1] Ha $c_1, c_2, \ldots$ valós (akár komplex) számok, a $c_1+c_2+\ldots+c_k+\ldots$ végtelen összegen az $S_n=c_1+c_2+\ldots c_n$ sorozat határértékét értjük, ha ez létezik. Ha a határérték nem létezit, az összeget nem értelmezzük. Az 1, x, $x^2,\ldots,x^k,\ldots$ függvényeket tekintve, az $1+x+x^2+\ldots+x^k+\ldots$ összeg minden $|x|<1$-re egy olyan számsor, amelyre a végtelen összeg a fenti definíció értelmében létezik, ha viszont $|x|\geqq 1$, az összeg nem létezik. Azt a függvényt, mely minden x-hez a végtelen összeget rendeli, ha ez létezik, és különben nincs értelmezve, az 1, x, $x^2,\ldots,x^k,\ldots$ függvények összegfüggvényének nevezzük.

Ugyanígy tetszőleges a_0, a_1x, $a_2x^2,\ldots,a_kx^k,\ldots$ függvények összegét is definiálhatjuk, erről van szó a 103. oldalon.

(1)-be x helyett $(-x)$-et téve, adódik, hogy $|x| < 1$-re

$$1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^k x^k + \ldots = \frac{1}{1+x}. \tag{8}$$

A fenti formulák bal oldalaiban közös, hogy x nem negatív egész kitevős hatványai lépnek fel a kitevőtől függő együtthatókkal. Közös alakjuk tehát

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k + \ldots, \tag{9}$$

és igazolható, hogy mindig van olyan $A \geq 0$ szám, hogy a (9) alatti ún. hatványsornak egy pontosan meghatározott értelemben van összege, ha $|x| < A$. Ez az összeg – ilyen x-ekre – fog függeni x-től; ezt $f(x)$-szel jelöljük. Az előbbi példákban a jobb oldalak igen egyszerű alakú függvényeknek adódtak; ez általában messze nincs így. De ha most $f(x)$-et írjuk elő és ennek hatványsorát próbáljuk megtalálni, ill. legalább együtthatóinak közelítő viselkedését, az sem könnyű feladat általában.

Második előkészületként tekintsük a pénzkifizetési problémát, tehát azt, hogy n forintos követelést hányféleképp lehet (1, 2, 5, 10, 20, 50, 100 és 500 forintosokkal) kifizetni. Ha pl. $n = 500$, akkor a feladat úgy is fogalmazható, hogy hányféleképp lehet az 500-ast felváltani. Ha az 1 Ft-osok száma egy kifizetésnél x_1, a 2 Ft-osoké x_2, az 5 Ft-osoké x_3, a 10-eseké x_4, a 20-asoké x_5, az 50-eseké x_6, a 100-asoké x_7, az 500-asoké x_8, úgy két feltétel szükséges a kifizetéshez:

a) $x_1, x_2, \ldots, x_8$ egészek és ≥ 0,

b) hogy ki legyen elégítve az

$$1 \cdot x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 10x_4 + 20x_5 + 50x_6 + 100x_7 + 500x_8 = n$$

egyenlet. Rögtön látható, hogy a) és b) teljesülése tényleg egy pénzkifizetési módot ad, a) és b) egyben elégségesek is. A feladat – mindjárt általánosítva – arra vezetett tehát, hogy adott $b_1, b_2, \ldots, b_k$ különböző pozitív egész számok mellett hány megoldása van nem negatív egészekben a

$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_k x_k = n \tag{10}$$

egyenletnek. Jelöljük ezt (n-et tekintve változónak) $P_k(n)$-nel (bár ez a b-ktől is függ, de ezek, mint mondottuk, fixeknek tekintendők).

Harmadik előkészületnek tekintsük a (10) feladat egy szellemes átfogalmazását, amely Eulertől származik. Tekintsük most $f(x)$-et az

$$f(x) = \frac{1}{(1-x^{b_1})(1-x^{b_2})\ldots(1-x^{b_k})} \tag{11}$$

speciális alakban, és próbáljunk hozzá (9) alakú hatványsort találni, ha $|x| < 1$. Ez esetben $|x^{b_1}| < 1$, azaz (1) alkalmazható x helyett x^{b_1}-gye1, azaz

$$\frac{1}{1-x^{b_1}} = 1 + x^{b_1 \cdot 1} + x^{b_1 \cdot 2} + \ldots + x^{b_1 x_1} + \ldots.$$

Ugyanígy

$$\frac{1}{1-x^{b_2}} = 1 + x^{b_2 \cdot 1} + x^{b_2 \cdot 2} + \ldots + x^{b_2 x_2} + \ldots$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{1-x^{b_k}} = 1 + x^{b_k \cdot 1} + x^{b_k \cdot 2} + \ldots + x^{b_k x_k} + \ldots.$$

A bal oldalakat összeszorozva, épp a (11) alatti $f(x)$-et kapjuk; a jobb oldalakat úgy szorozva, ahogy több tagot több taggal szoktunk,

$$x^{b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_k x_k}$$

alakú tagok összességét kapjuk. Ha tehát azt nézzük, hogy ilyen módon hányszor kaphatunk egy rögzített n mellett x^n-t, úgy ezen együttható $P_k(n)$. (A fenti eljárásban hallgatólagosan úgy kezeltünk „végtelen sok tagú” összegeket, mint véges sok tagúaknál megszoktuk, ez azonban jelen esetben igazolhatólag helyes.) Így tehát előáll $|x| < 1$-re az

$$1 + P_k(1) \cdot x + P_k(2) \cdot x^2 + \ldots + P_k(n) \cdot x^n + \ldots = \frac{1}{(1-x^{b_1})\ldots(1-x^{b_k})} \tag{12}$$

meglepő formula.

Nyertünk-e azonban ezzel a szép formulával valamit a $P_k(n)$-ek meghatározására, ami célunk volt? A dolog lényegén nem változtatunk, ha a számítási részletek lehetőleg egyszerűvé tétele végett csak a

$$k=3, \qquad b_1=1, \qquad b_2=2, \qquad b_3=3$$

esetet tekintjük (10)-ben, azaz keressük az

$$1x_1+2x_2+3x_3=n \tag{13}$$

egyenlet nem negatív x_1, x_2, x_3-ban való megoldásai $P_3^*(n)$ számát. Egyrészt (12)-ből adódik, hogy

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}=1+\sum_{n=1}^{\infty}P_3^*(n)x^n, \tag{14}$$

hacsak $|x|<1$. Másrészt azonban kipróbálhatólag igaz az

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}&=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{(1-x)^3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}+\\&+\frac{17}{72}\cdot\frac{1}{1-x}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{1+x}+\frac{1}{9}\cdot\frac{2+x}{1+x+x^2}\end{aligned} \tag{15}$$

azonosság. Beírva (7), (6), (1), (8), (5)-öt (15)-be, adódik hogy

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}=1+a_1x+\ldots+a_nx^n\ldots, \tag{16}$$

ahol

$$a_n=\frac{1}{6}\binom{n+2}{2}+\frac{1}{4}\binom{n+1}{1}+\frac{17}{72}+\frac{(-1)^n}{8}+\frac{2}{9}\cos\frac{2\pi n}{3}. \tag{17}$$

Így $|x|<1$-re adódott az

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$$

függvényre két, látszólag egészen különböző alakú hatványsoralak. Bebizonyítható azonban általánosan, hogy – kissé pongyolán kifejezve – egy függvénynek $|x|<1$-ben *csak egy* hatványsora van. Ebből adódik, hogy

$$P_3^*(n)=\frac{1}{6}\binom{n+2}{2}+\frac{1}{4}\binom{n+1}{1}+\frac{17}{72}+\frac{(-1)^n}{8}+\frac{2}{9}\cos\frac{2\pi n}{3}. \tag{18}$$

Erre a formulára még visszatérünk. – A (10) alatti általános esetben hasonló gondolatmenettel nyilván hasonló eredmény nyerhető.

Ha speciálisan a b_p számokként az első k pozitív egész számot vesszük, úgy (12)-ből $|x|<1$-re

$$1+P_k(1)\cdot x+P_k(2)\cdot x^2+\ldots+P_k(n)\cdot x^n+\ldots=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^k)}. \tag{19}$$

De mi a helyzet, ha összeadandók gyanánt nemcsak az első k egészet, hanem *minden* egészet megengedünk? Ha tehát az

$$1x_1+2x_2+\ldots=n \tag{20}$$

egyenlet megoldásainak számát nem negatív egészekben $p(n)$-nel jelöljük, úgy (19) után $|x|<1$-re az

$$\begin{aligned}&1+p(1)\cdot x+p(2)\cdot x^2+\ldots+p(k)\cdot x^k+\ldots=\\&=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^k)\ldots}\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{Q(x)}\end{aligned} \tag{21}$$

formula várható.[2] Ezt már Euler tudta a 18. század közepén; itt a végtelen sok tényezős szorzatnak pontos értelem adható. De ebből nyerni $p(n)$ pontos meghatározását az előbbivel analóg módon, senkinek sem sikerült, és más módon sem, egészen Ramanujan Angliába jöveteléig. Ekkor egy alkalommal Hardyval diszkutálták Ramanujan egy állítását első leveléből. Ez arra vonatkozott, hogy ha tekintjük $|x|<1$-ben fix összegfüggvény gyanánt az

$$\frac{1}{1-2x+2x^4-2x^9+2x^{15}-\ldots}$$

[2]Ezzel a jelöléssel azt akarjuk kifejezni, hogy az egyenlőségi jel egyik oldalát a másikkal definiáljuk. *(Szerk.)*

függvényt, úgy Ramanujan azt állította, hogy az ehhez tartozó a_n^* együtthatók az

$$a_n^* = \left\{ \frac{1}{4n} \left(\frac{e^{\pi\sqrt{n}} + e^{-\pi\sqrt{n}}}{2} - \frac{e^{\pi\sqrt{n}} - e^{-\pi\sqrt{n}}}{2\pi\sqrt{n}} \right) \right\} \tag{22}$$

formulából határozhatók meg, ahol $\{x\}$ az x-hez legközelebbi egészet jelenti. Ennek bizonyítására Ramanujan egy egészen újszerű, de teljesen heurisztikus utat vázolt, amiről kiderült, hogy (22)-t nem adja ugyan ki, az nem is igaz, de rájöttek arra, hogy $p(n)$ meghatározására igenis alkalmas. Ez önmagában is jelentős eredmény; később sok alkalmazása lett a fizikában és a statisztikus csoportelméletben. Fő jelentősége azonban az, hogy Hardy és Littlewood felfedezték, hogy Ramanujan zseniális alapgondolata, kombinálva azt a nyugati analízis legkifinomultabb technikájával, a számelmélet több klasszikus problémájában azelőtt hihetetlen eredményeket tud produkálni.

Most csak két ilyen problémát említek meg egészen röviden. Miután Lagrange 1770-ben bebizonyította, hogy minden pozitív egész n szám előállítható, mint legfeljebb 4 pozitív egész szám négyzeteinek összege, Waring ugyanezen évben sejtésképp kimondotta, hogy analóg tétel létezik négyzetek helyett k-adik hatványokra is, ahol k tetszőleges pozitív egész, ≥ 2. Pontosabban szólva azt sejtette, hogy minden $k \geq 2$ egészre és pozitív egész n-re, alkalmas

$$a = a(k)\text{-val az}$$
$$n = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_a^k$$

egyenlet megoldható nem negatív egész $(x_1, x_2, \ldots, x_a)$-val. A lényeges az állításban nyilván az, hogy a felhasznált k-adik hatványok száma n-től nem függ; ha ezt nem kötnénk ki, úgy

$$n = \underbrace{1^k}_{1} + \underbrace{1^k}_{1} + \ldots + \underbrace{1^k}_{n}$$

a feladat megoldása volna. Lagrange előbb említett tétele a jelölés mellett azt állítja, hogy $a(2) = 4$.

Bár az általános sejtést Hilbert 1909-ben bebizonyította, eljárása az $a(k)$-nak csupán a létezését bizonyította be, számértékét *elvileg* nem adhatta ki, és még kevésbé a megoldások számát. A $k = 3$ esetre szorítkozva Hardy és Littlewood az

$$1 + x^{1^3} + x^{2^3} + \ldots + x^{m^3} + \ldots = f_0(x)$$

függvényből kiindulva képezték az $f_0(x)^b$ függvényt, egyelőre határozatlan b pozitív egésszel. Ennek hatványsorában x^n együtthatója épp azt fogja jelenteni, hogy n hányféleképp állítható elő, mint b darab nem negatív egész szám 3-ik hatványainak összege; ha b-t sikerül úgy megválasztani, hogy $f_0(x)^b$ minden együtthatója pozitív, úgy Waring sejtése igaz, és a keresett $a(3) \leq b$. Itt lépett be döntő újításként Ramanujan ötlete; ezzel nyerték az $a(k)$-ra az első explicit korlátot, mely szerint

$$a(k) \leq (k-2)2^{k-1} + 5$$

minden egész $k \geq 2$-re, ha n „elég nagy".

Nem térve ki az azóta ezen a téren elért óriási haladásra, megemlítem a második klasszikus problémát, a „ternär Goldbach"-problémát, mely 1742-ből való és azt állítja, hogy minden páratlan egész, mely ≥ 7, előállítható mint legfeljebb 3 prímszám összege. Ezen kérdés reménytelennek látszó nehézségét Hardy és Littlewood 1923-ban törték meg, ismét Ramanujan alapgondolatából kiindulva; egy *teljes* bizonyításhoz, legalábbis $n > e^{250}$ esetére, először Vinogradov jutott 1935-ben, tovább javítva az eredeti utat.

Fontossá vált eredményeket tovább idézhetnék Ramanujannak Hardyval való közös munkájából; ezek, ha *alapgondolatuk* Ramanujantól jött is, nem jellemzőek analitikus látásmódjára, a szép formulákban kifejezett összefüggések felfedezésére való intuíciójára. Ezek sokkal mélyebben fekvők, elemzésük, váratlanságuk, mélységük érzékeltetése sokkal több előkészületet igényel, mint a föntebb látott partícióké.[3] De alapvetőbb nehézség az, hogy nem világos, egyáltalán mi tesz egy formulát, egy „száraz matematikai formulát" – ahogy a köznyelv mondja – széppé? Először ezt elemezzük kissé általánosan, azután konkrétabban egy olyan formulát fogunk boncolgatni, amely Ramanujan korai naplójában szerepel, ha azt – Ramanujan tudta nélkül – Euler közel 200 évvel korábban felfedezte, de amelyhez az előkészületek aránylag könnyebbek és ezek nehezén is már előbb túlestünk.

Mi tesz tehát egy formulát széppé? Ehhez először tekintsünk egy formulát, amelyet nem neveznék szépnek. A közismert

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

formula hasznos. De az egyenlőség két oldalán levő kifejezések egyrészt eleve hasonló jellegűek, másrészt a legegyszerűbb gondolattal, a bal oldalon kijelölt szorzás elvégzésével a formula érvényességének belátása az általános iskolásnak sem jelent problémát. Ezt tehát nem nevezhetném „szép" formulának. Más a helyzet pl. a klasszikus

$$\frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \ldots = \sin x \tag{23}$$

[3] Partíció: természetes számnak természetes számok összegeként való előállítása. *(Szerk.)*

formulánál, ahol a jobb oldalon x a szögnek ívmértékben kifejezett nagysága. Itt a két oldalon álló mennyiségek egészen különböző jellegűek, a $\sin x$ geometriai származtatású mennyiség és ezért az összefüggés annak, aki először látja, egészen meglepő, váratlan jellegű. Még paradox is első ránézésre, hiszen a formula tetszőleges nagy valós x-ekre is igaz; a bal oldal *egyes* tagjai külön-külön óriási nagyok lesznek, ha x nagy, viszont az összeg-függvény, a $\sin x$, csak $+1$ és -1 közötti értéket vehet fel. Tehát a (23) formula meglepő tartalma röviden az, hogy – a szólásmondás megfordításával – sok nagy kevésre mehet. Éspedig nem triviális módon, mint pl. a triviális

$$x - x = 0$$

formulában. Továbbá a (23) formula helyességének belátása bizonyos dolgok tudása nélkül, direkt módon, semmiképp nem evidens. Mégis aránylag könnyen látható, hogy az $f(x)$ függvények egy elég általános osztályára a hatványsorát megtalálni nem nehéz feladat, és szerencsére a $\sin x$ függvény ehhez a függvényosztályhoz tartozik. De szép a (18) formula is. Az egyenlőség két oldalán látszólag egészen különböző jellegű kifejezések állnak; a jobb oldaliról önmagában az sem evidens, hogy egész szám (pedig nyilván annak kell lennie). Az is különös, hogyan kerül a jobb oldalra egy periodikus tag, a $2\cos\dfrac{2\pi n}{3}$? Tehát a formula jellege váratlan és meglepő. Hasznos is, hiszen a bal oldal *direkt* kiszámításához n^2-rendű számú műveletet kellene végrehajtani, a jobb oldal kiszámításához egy szorzás és öt összeadás elég. Bebizonyítása *direkt*, mint láttuk, nem egyszerű; ha már *tudjuk* a formulát, egy verifikálás teljes indukcióval nem nehéz, ui. ez esetben igazolható, hogy

$$P_3(n) - P_3(n-3) = 1 + \left[\frac{n}{2}\right],$$

ill.

$$\begin{aligned} P_3(2m) - P_3(2m-3) &= 1 + m, \\ P_3(2m+1) - P_3(2m-2) &= 1 + m. \end{aligned}$$

Mint mondottuk, a „Ramanujan-rendűen szép” formulák illusztrálására befejezésül egy Eulertől származó régebbi formulát fogunk kissé behatóbban elemezni.

E formula a (21) alatti $Q(x)$-nek

$$1 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots \tag{24}$$

alakú előállítására vonatkozik, az együtthatók meghatározására. Hogyan állna az ember egy ilyen kérdéshez? Képezné a részszorzatokat:

$$\begin{aligned} \Pi_2 &\stackrel{\text{def}}{=} (1-x)(1-x^2) = 1 - x - x^2 + x^3, \\ \Pi_3 &\stackrel{\text{def}}{=} (1-x)(1-x^2)(1-x^3) = 1 - x - x^2 + x^4 + x^5 - x^6, \\ \Pi_4 &\stackrel{\text{def}}{=} (1-x^4)\Pi_3 = 1 - x - x^2 + 2x^5 - x^8 - x^9 + x^{10}, \\ \Pi_5 &\stackrel{\text{def}}{=} (1-x^5)\Pi_4 = 1 - x - x^2 + x^5 + x^6 + x^7 - x^8 - x^9 - x^{10} + x^{13} + x^{14} - x^{15}. \end{aligned}$$

A Π_6-ot már direkt nem képezzük, csak két észrevételt teszünk. Először is az új tényező x-nek 6-nál kisebb kitevőjű hatványát már nem tudja érinteni, viszont x^6 kiesik, azaz

$$\Pi_6 = 1 - x - x^2 + x^5 + 2x^7 + \ldots$$

Vagyis a továbbiakban x^3, x^4 és x^6 biztosan nem fog fellépni és mindegyik így kezdődik:

$$1 - x - x^2 + x^5.$$

Π_7-et képezve nyilván x^7 együtthatója $+1$ lesz, azaz Π_7-től kezdve *mindegyik* részletszorzat kezdete:

$$1 - x - x^2 + x^5 + x^7. \tag{25}$$

Az eddigi próbálkozások nem sok fogódzót adnak az a_n-együtthatók szabályára azonfelül, hogy azt sejtetik, hogy az együtthatók „elég szabálytalanul” csak 0 és ± 1 lehetnek. Ha tovább folytatnánk $\Pi_8, \ldots, \Pi_{15}$ képzését, újabb meglepetésként adódna az előbbivel analóg gondolatmenettel, hogy Π_{15}-től kezdve az elején x^7 után nagyobb hézag következik és minden ilyen Π már úgy kezdődik, hogy

$$1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15}.$$

Itt már van egy kis fogódzó; ui. észrevehető, hogy a ténylegesen fellépő exponensek különbségei rendre

$$2 - 1 = 1, \qquad 7 - 5 = 2, \qquad 15 - 12 = 3.$$

Csak éppen a „kezdő”

$$1,\ 5,\ 12$$

kitevőkről nem látszik az első 15 részletszorzat után sem valami szabályosság. És még hosszú ideig.

Euler – Ramanujan szóban forgó tétele mármost egészen pontosan megadja az összes a_n-együtthatók képzési szabályát. Különös – és teljesen váratlan – módon minden attól függ, hogy n előállítható-e

$$n = \frac{3k^2 + k}{2} \tag{26}$$

alakban egy pozitív vagy negatív egész k-val és Euler tételének első fele azt mondja ki, hogy

$$a_n = 0, \tag{27}$$

ha n *nem* (26) alakú. Ha sorban

$$k = 0,\ +1,\ -1,\ +2,\ -2,\ +3,\ -3,\ \ldots,$$

úgy rendre

$$\frac{3k^2 + k}{2} = 0,\ 2,\ 1,\ 7,\ 5,\ 15,\ 12,\ \ldots$$

ami azt jelenti, hogy a ténylegesen fellépő tagok (24)-ben

$$x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^5,\ x^7,\ \ldots\text{-hez}$$

tartoznak. Ez egyezésben van (25)-tel, de még nem ad felvilágosítást arról, hogy a (26) alatti n-ekre mi a_n, értéke. Euler tételének második fele erre válaszol, és azt mondja ki, hogy az ilyen n-ekre

$$a_n = (-1)^k. \tag{28}$$

Ez már rögtön ad felvilágosítást arra, hogy (25)-ben x és x^2 együtthatója miért -1, míg x^5 és x^7-é $+1$. Maga a szép formula kiírt alakja az, hogy $|x| < 1$-re

$$(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^m)\ldots = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k x^{\frac{3k^2+k}{2}}.$$

Mondanom sem kell, hogy a szépséget a formula *tartalmára*, és nem a *formájára* értem.

A tétel szép, először is, mert váratlan, hiszen a bevezetőben leírt próbálkozást jó sokáig kellene a vájt fülűnek is csinálnia, míg az együttható szabályra rájön. A tétel szép, mert a kapott szabály, ha rendkívül szokatlan is, elegánsan, röviden, pár szóval megvilágítható volt. A tétel szép, mert helyessége egyáltalán nem evidens, igazán *egyszerű* bizonyítás rá máig sincs, indukciós vagy másfajta verifikálás nem megy, még akkor sem, ha a vájt fülű az együttható szabályra empirikusan már rájött. A tétel szép, mert belőle rögtön következik egy másik, ugyancsak váratlan állítás. Ha a (21) alatti $Q(x)$ helyett az

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\ldots(1+x^m)\ldots\text{-re} \tag{29}$$

vonatkozólag kérdeznénk, hogy

$$1 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots$$

alakba írva, mi a c_n együttható értéke, az előbbiek alapján nyilvánvaló felelet az, hogy annyiszor 1, ahányféleképp n előállítható

$$n = x_1 + x_2 + \ldots + x_l \tag{30}$$

alakban, ahol l tetszőleges egész és

$$1 \leq x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_l. \tag{31}$$

Vagyis ahányféleképpen n előállítható *különböző* pozitív egészek összegeként. Ha $Q(x)$-et most ezen szemszögből nézzük, akkor minden (30)-(31) alatti előállítás, amelynél l páros, $+1$-gyel, amelynél l páratlan, (-1)-gyel járul a_n-hez. Tehát azt nyertük, hogy

$$a_n = \Pi_1 - \Pi_2, \tag{32}$$

ahol Π_1 azt jelenti, hogy n hányféleképp állítható elő mint *páros sok* különböző pozitív egész szám összege, Π_2 pedig mint *páratlan sok* különböző pozitív egészé. Így Euler tétele mellékesen kiadja azt, hogy az n pozitív egész ugyanannyiféleképp állítható elő páros sok különböző pozitív egész összegeként, mint páratlan sok ilyen összegeként, *kivéve, ha* n a (26) *alakba írható*, amikor is 1-gyel több, ill. kevesebbféleképp aszerint, hogy k páros, ill. páratlan. Ha valakinek azt a kérdést tennénk fel az előzmények nélkül, mit gondol, egy n pozitív egész szám páros vagy páratlan sok különböző pozitív egész szám összegeként állítható-e elő többféleképp, nagy valószínűséggel azt felelné, hogy mindig, talán az első pár n kivételével, ugyanannyiféleképp, hiszen nincs semmi ok, hogy egyikből több legyen, mint a másikból. Nagyon meg lenne lepve, ha hallaná, hogy ez alól *végtelen* sok kivétel van, és ezek épp a (26) alatti n-nek!

Szép tétel általában nem izolált érdekességű. Ez áll a szóban forgó Euler-tételre is. (24) és (21)-ből

$$(1 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_\mu x^\mu + \ldots)(1 + p(1) \cdot x + +p(2) \cdot x^2 + \ldots + p(\nu)x^\nu + \ldots) = 1. \tag{33}$$

Ha $n \geq 1$, akkor a jobb oldalon x^n együtthatója 0, a bal oldalon pedig

$$p(n) + p(n-1) \cdot a_1 + p(n-2) \cdot a_2 + \ldots + p(1) \cdot a_{n-1} + a_n.$$

Az említett egyértelműségi tétel miatt ez 0, azaz

$$p(n) = -a_1p(n-1) - a_2p(n-2) - \ldots - a_{n-1}p(1) - a_n. \tag{34}$$

Ez tehát a $p(n)$-re egy rekurzív formula. Ha ezt $p(n)$ értékeinek számítására akarjuk felhasználni, akkor ez egy igen jól használható formula. Ugyanis a $p(\nu)$-k igen nagy számok; ha (34)-ben sok tag van, akkor ez nagyon sok számolást jelent. De Euler tétele szerint az a_ν-együtthatók java része 0, úgy hogy (34) valójában jóval kevesebb tagot tartalmaz. Ez a tény még ma, a gyors számítógépek korában is hasznos, hiszen pl.

$$p(200) = 3\ 972\ 999\ 029\ 388,$$

de Ramanujan korában neki rendkívül sokat jelentett. Éspedig azért, mert még Indiában megkezdett vizsgálatai a $p(n)$-ek oszthatósági tulajdonságaira vonatkozólag mindig konkrétan kiszámolt $p(n)$-eken konstatált *numerikus* észrevételekkel kezdődtek. Márpedig Ramanujannak ezek és az ezekből kiinduló, máig is csak naplójában levő feljegyzései indították B. Birch oxfordi professzort 1975-ben, tehát Ramanujan halála után több, mint 50 évvel, hogy „A look back at Ramanujan's Notebooks" c. dolgozatában[4] leírjon olyan mondatot, hogy „... They support the view that Ramanujan's insight into the arithmetics of modular forms was even greater than has been realized..."[5] mindezt egy emberről, aki középiskoláit sem tudta elvégezni!

[4] Visszapillantás Ramanujan naplóira.

[5] "Mindezek alátámasztják azt, hogy Ramanujan többet látott meg a moduláris formák aritmetikájából, mint eddig gondoltuk ..."