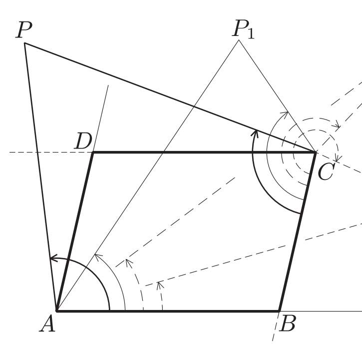
Első feladat. *Egy paralelogramma csúcsai a körüljárás sorrendjében: A, B, C, D. A paralelogrammán kívül levő P pontra a PAB és PCB szögek nagysága egyenlő, irányításuk pedig ellentétes.*

Bizonyítsuk be, hogy ekkor $APB\sphericalangle = DPC\sphericalangle$.

I. megoldás. Állapítsuk meg először, hol helyezkedik el a P pont. Megmutatjuk, hogy nem lehet az AB, AD félegyenesek meghatározta, C-t tartalmazó szögtartományban. Valóban, az itt fekvő P pontokra[1] a $PAB\sphericalangle$ része a $DAB\sphericalangle$-nek, a $PCB\sphericalangle$ viszont tartalmazza a $DAB\sphericalangle$-gel egyenlő $DCB\sphericalangle$-et.

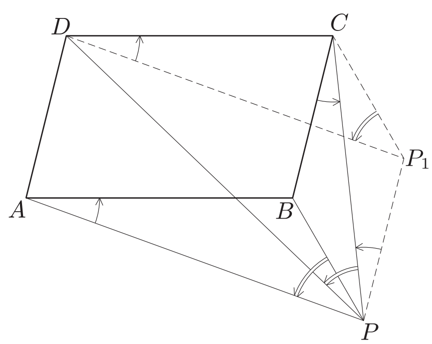


1. ábra

Hasonlóan nem lehet P az A-t tartalmazó DCB szögtartományban sem, tehát vagy az AB és CB egyenesek B-n túli meghosszabításai közti kenvex szögtartományban van, vagy AD-nek és CD-nek a D-n túli meghosszabításai közt.

Feltehetjük, hogy az előbbiben, mert ellenkező esetben az ellentétesen irányított BAP és BCP szögekkel együtt a paralelogramma A-nál, ill. C-nél levő szögével csökkentett DAP és DCP szögek nagysága is egyenlő és irányításuk ellentétes. Így tükrözve a paralelogramma középpontjára, visszavezettük a problémát arra az esetre, amikor P az AB és CB meghosszabbítása határolta tartományban van.

Toljuk el a P pontot a BC vektorral. Új helyzete legyen P_1 (2. ábra). Ekkor a DCP_1 háromszög az ABP háromszög eltolt képe, BPP_1C pedig paralelogramma. A $P_1DC\sphericalangle$ és a $PAB\sphericalangle$ irányítás és nagyság szerint megegyezik. Utóbbi a feladat feltétele szerint a $BCP\sphericalangle$-gel egyezik meg nagyságban és irányításra is, ez pedig a $P_1PC\sphericalangle$-gel, mert a BPP_1C paralelogramma középpontjára való tükrözés egymásba viszi át a kettőt.



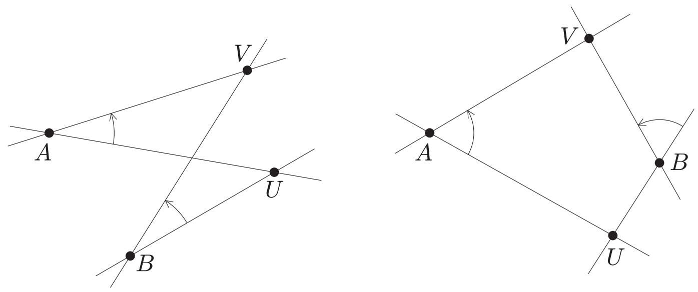
2. ábra

Azt nyertük tehát, hogy a P-t és a D-t P_1-gyel összekötő egyenest egyező irányban egyenlő szöggel elfordítva kapjuk a C-n átmenő egyeneseket. Ez azonban azt is jelenti, hogy C, D, P és P_1 egy körön van. Ekkor a P-t és P_1-et C-vel összekötő egyeneseket is egyező irányú és nagyságú forgás viszi át a P-t ill. P_1-et, D-vel összekötő egyenesekbe. A P_1C, P_1D egyeneseket viszont CB vektorral eltolva a PB, PD egyeneseket kapjuk. Az előbbit az utóbbiba tehát ugyanolyan irányú és nagyságú forgás viszi át, mint PC-t PD-be. Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.

Megjegyzések. 1. A kerületi szögek tételét nem egészen megszokott formában fogalmaztuk meg. Ezt azért tettük, mert ebben a formában szükséges és elégséges feltételét kapjuk annak, hogy négy pont egy körön feküdjék, anélkül, hogy vizsgálni kellene a pontok egymáshoz viszonyított elhelyezkedését a síkban.

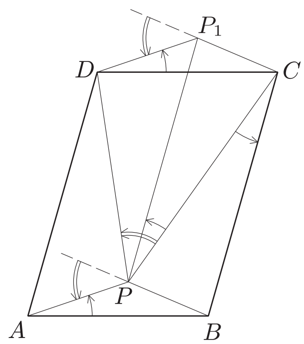
Az A, B, U, V pontok akkor és csak akkor vannak egy körön, ha az AU és BU egyenest ugyanolyan nagyságú és irányú elforgatás viszi át az AV, ill. BV egyenesbe (3. ábra).

[1]Az ábrán a szögek iránya ellentétes



3. ábra

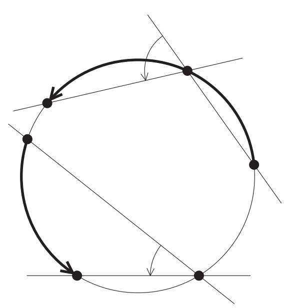
A tétel ilyen megfogalmazását használva elhagyhatjuk azt a feltevést is, hogy a P pont a paralelogrammán kívül van. Minden esetben igaz, hogy ha a feladat további feltételei teljesülnek, akkor a P-t B-vel, ill. C-vel összekötő egyenes egyező nagyságú szöggel forgatható egyező irányban az A-val, ill. D-vel összekötő egyenesbe. A fenti bizonyítás változtatás nélkül érvényes marad, amint az a 4. ábrán könnyen követhető.



4. ábra

2. Az előző megjegyzésben megfogalmazott tételt, illetőleg annak megfelelő összefüggéseket általában a középponti és kerületi szögek közti összefüggésből szokás levezetni, a tétel azonban könnyen belátható közvetlenül is.

Először kissé módosítjuk a kerületi szög és a belefoglalt körív fogalmát. Kerületi szögnek nevezzük két egyenes szögét, ha az egyenesek a kör kerületén metszik egymást. Tekintsük az egyenesek másik metszéspontját a körrel. A két egyenes szöge által befoglalt köríven a körnek a metszéspontok közti két íve közül azt értjük, amelyiket a két egyenes adott nyílásszögű szögtartománya tartalmaz. Ha az egyenesek irányított szögét tekintjük, akkor a befoglalt ívet is irányíthatjuk az első szögszárral való metszésponttól a második szögszárral való metszéspont felé. Nem zárjuk ki azt sem, hogy az egyik szögszár érintő legyen; ez esetben az ezzel a szárral való „második metszéspont" is jelentse az érintés pontot (5. ábra).



5. ábra

A kerületi szög ilyen értelmezésével megengedtünk olyan eseteket is, amelyeknél a szög csúcsa a befoglalt köríven van és nem csak a 180°-ra kiegészítő szöget tekintjük mint a teljes körré kiegészítő íven nyugvó kerületi szöget.[2]

A következő tételt bizonyítjuk be:

Adott kör két (irányított) kerületi szöge akkor és csak akkor foglal be nagyságra és irányra egyenlő íveket, ha egyenlők.

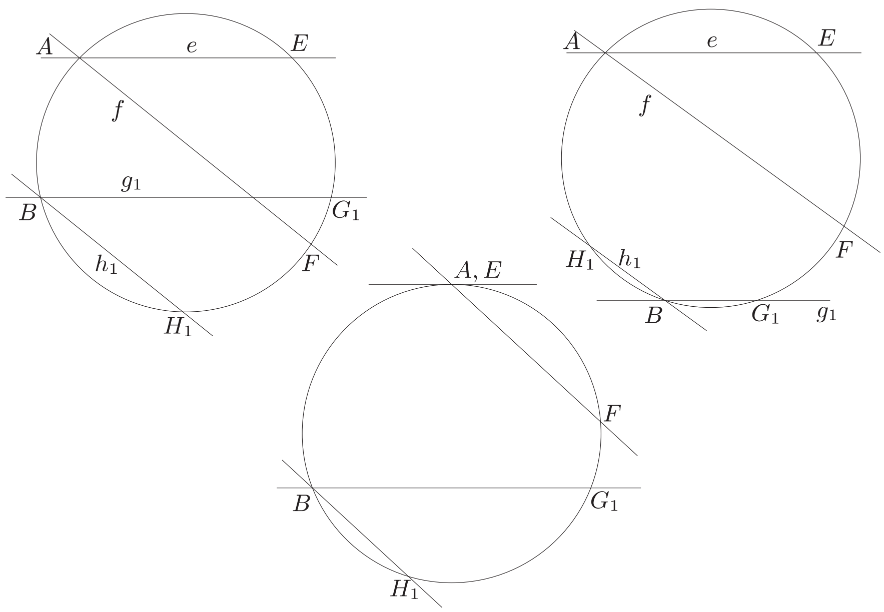
A tételből nyilvánvalóan következik az előző megjegyzésben kimondott tétel. Ha ugyanis A, B, U, V egy körön fekszik, akkor az AU, AV egyenesek szöge is, a BU, BV egyeneseké is ugyanazt az UV ívet foglalja magába, tehát egyenlők.

[2] Ezért látszott célszerűbbnek befoglalt ívről beszélni, mint arról az ívről, amin a szög nyugszik.

Ha viszont AU és AV nagyságra és irányra ugyanakkora szöget határoz meg, mint BU és BV, akkor először is nem lehet A, B és U egy egyenesen, mert akkor AU-val, ill. BU-val egyenlő szöget bezáró egyenesek párhuzamosak lennének, nem lehetne egy közös V metszéspontjuk, kivéve, ha egybeesnek ekkor sincs azonban egy meghatározott V metszéspont.

Létezik tehát egy egyértelműen meghatározott, A-n B-n, és U-n átmenő kör. Messe ez AV-t V'-ben. Ekkor BU és BV' szöge megegyezik AU és AV szögével, tehát feltétel szerint BU és BV szögével is, BV tehát egybeesik BV'-vel és így AV-vel való V metszéspontja is V'-vel. Ez azonban éppen azt jelenti, hogy A, B, U, V egy körön van, és ezt akartuk belátni.

Bizonyítsuk be ezután a fönt kimondott tételt, legyen a körben két kerületi szög. Az egyiket alkossák az e és f egyenesek, a másikat a g és h egyenesek. Forgassuk el az utóbbit úgy, hegy az elforgatott g_1 és h_1 egyenes közül g_1 legyen párhuzamos e-vel. Jelöljük a szögek csúcsát A-val, ill. B-vel, e, f, g_1, h_1 másik metszéspontját a körrel E, F, G_1, H_1-gyel (6. ábra).



6. ábra

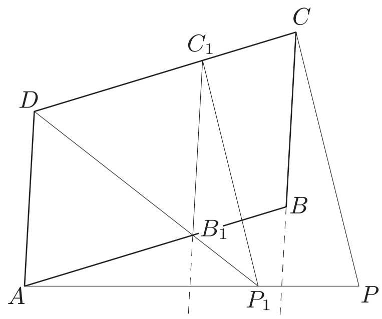
Két állítást kell belátnunk.

a) *A szögek egyenlőségéből következik az íveké:* ha e és f szöge megegyezik g_1 és h_1 szögével, akkor h_1 is párhuzamos f-fel. Az AE és BG_1 párhuzamos húrok felező merőlegese a körnek egyaránt átmérője és párhuzamosak, tehát egybeesnek. Az EG_1 ívnek erre az átmérőre vett tükörképe az AB ív, ezek tehát egyenlők és ellentétes irányúak. Hasonlóan az FH_1 ív is egyenlő AB-vel és ellentétes irányú, tehát EG_1 és FH_1 egyező irányú és nagyságú. Ekkor azonban EF és G_1H_1 is egyező irányú és nagyságú, mert az előbbi az EG_1 és G_1F ívek összege, az utóbbi pedig G_1F-ből az FH_1 ív hozzáadásával keletkezik.

b) *Az ívek egyenlőségéből következik a szögeké:* Ha az EF és G_1H_1 ívek irányra is, nagyságra is megegyeznek, akkor $EG_1 = EF + FG_1$ és $FH_1 = FG_1 + G_1H_1$ ívek is megegyeznek. Mivel $e \parallel g_1$ most is fennáll, így EG_1 és AB egyező nagyságú és ellentétes irányú ívek. Ekkor azonban ugyanez áll az AB és FH_1 ívekre is. Ha tehát tükrözünk az AF húrt merőlegesen felező átmérőre, akkor B tükörképe H_1 lesz. Eszerint a BH_1 egyenes, vagyis h_1 is merőleges a tükörtengelyre, tehát párhuzamos f-fel. Ekkor azonban g_1 és h_1 szöge megegyezik e és f szögével, és ezt kellett belátnunk.

II. megoldás. A P pont rombusz esetén a BD átló egyenesének a paralelogrammán kívüli részén van, mert a BD-re való tükrözés A-t C-be és így a BAP szöget a BCP szögbe viszi át.

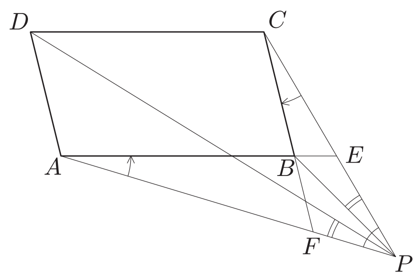
Ha a paralelogramma nem rombusz, akkor mérjük az A-ból induló és B-n átmenő félegyenesre az $AB_1 = AD$ távolságot. A B_1-en át AD-vel párhuzamosan húzott egyenes messe a CD egyenest C_1-ben. Egy P_1 pont, amely az AB_1C_1D paralelogrammára vonatkozóan elégíti ki a feladat feltételeit, a DB_1 átló egyenesén van. Szimmetria folytán feltehetjük, hogy a B_1-en túli meghosszabbításon (7. ábra).



7. ábra

Toljuk el a $B_1C_1P_1$, szöget úgy, hogy B_1C_1 menjen át BC-be. Ekkor P_1 az AP_1 egyenes mentén mozdul el és jut a P pontba. Ez a BC egyenes ellenkező partján van mint A, másrészt az egész A-ból induló P_1-en átmenő félegyenes AB ellenkező partján van, mint a paralelogramma. Így P az AB és CB egyenesek B-n túli meghosszabbításai határolta síkrészben van.

Messe AB és CB egyenese a CP, ill. AP egyenest E-ben, ill. F-ben. Megmutatjuk, hogy az $APCD$ és $EPFB$ négyszögek hasonlóak, a csúcsokat felsorolt sorrend szerint feleltetve meg egymásnak. (8. ábra)



8. ábra

Valóban P-nél levő szögük közös; másrészt $EBF\sphericalangle = ABC\sphericalangle$, mert egymás csúcsszögei, viszont $ABC\sphericalangle = ADC\sphericalangle$; végül $BEP\sphericalangle = DCP\sphericalangle = DAP\sphericalangle$. Az utóbbi egyenlőség épp a feladat feltétele folytán áll fenn.

Az ABF és CBE háromszög hasonló, mert A-nál és C-nél feltétel szerint egyenlő szög van, a B-nél levő szögek pedig csúcsszögek. Ebből következik, hogy
$$\frac{BE}{BF} = \frac{BC}{BA} = \frac{AD}{CD},$$
azaz a két négyszög egy-egy egymásnak megfelelő oldalpárjának az aránya is megegyezik. Ebből már következik a két négyszög hasonlósága és ebből az, hogy az átlók az egymásnak megfelelő oldalakkal egyenlő szöget zárnak be. Így $APD\sphericalangle = EPB\sphericalangle = CPB\sphericalangle$. Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.

Második feladat. *Valaki* 5^5 $(= 3125)$ *szelvénnyel lottózik. Bármely két szelvényét nézzük, van olyan szám, amely mindkét szelvényen meg van ikszelve.*

Bizonyítsuk be, hogy az 1*-től* 90*-ig terjedő számok között található* 4 *olyan, hogy az illető mindegyik szelvényén a* 4 *szám közül legalább az egyik meg van ikszelve.*

Megoldás. Feltesszük, hogy a különféle lottószelvények különféleképpen vannak kitöltve. Vegyünk egy tetszőleges L_1 lottószelvényt. A többi 5^5-1 db lottószelvény mindegyike tartalmazza az L_1-en levő 5 szám valamelyikét. Az L_1-en levő 5 szám közül tehát legalább az egyiket a többi szelvények közül legalább 5^4 tartalmazza. Válasszunk ki egy ilyen számot, jelöljük ezt a-val. a-t tehát (L_1-et is beleszámítva) több, mint 5^4 szelvény tartalmazza. Ha minden szelvény tartalmazza a-t, akkor az állítás helyes. Ha nem, legyen L_2 egy olyan szelvény, amely nem tartalmazza a-t. Az a-t tartalmazó, több mint 5^4 szelvény mindegyike tartalmaz legalább egy L_2-n levő számot. Tehát az L_2-n levő 5 szám közül legalább az egyiket (mondjuk b-t) az a-t tartalmazó szelvények közül több, mint 5^3 kell, hogy tartalmazza. Ha minden szelvény tartalmazza a és b közül legalább az egyiket, készen vagyunk. Ha nem, legyen L_3 egy sem a-t, sem b-t nem tartalmazó szelvény. A fenti gondolatmenetet megismételve találunk L_3-on egy olyan c számot, hogy több mint 5^2 szelvény van, amelyik a, b, c mindegyikét tartalmazza. Ismét készen vagyunk, vagy van olyan L_4 szelvény, ami a, b, c egyikét sem tartalmazza, és ekkor ezen találunk olyan d számot, hogy több, mint 5 szelvény tartalmazza a, b, c, d mindegyikét. Ha lenne olyan L_5 szelvény, amelyik a, b, c, d egyikét sem tartalmazná, akkor az L_5-ön levő öt szám egyike, mondjuk e, olyan lenne, hogy több, mint 1 szelvény lenne, amelyik a, b, c, d, e mindegyikét tartalmazná. Mivel ez feltevésünk szerint lehetetlen, bebizonyítottuk, hogy az a, b, c, d számnégyes rendelkezik a kívánt tulajdonsággal.

Megjegyzések. 1. Arra a feltevésre, hogy különböző szelvények különbözőképpen vannak kitöltve, valóban szükség van. Könnyen konstruálhatunk olyan példát, ami ezt mutatja. Válasszunk ki pl. az első 9 természetes szám közül minden lehetséges módon 5-öt. Ez $\binom{9}{5} = 126$-féleképpen lehetséges.Ezután az 5^5 szelvény mindegyikén ezen ötösök valamelyikét jelöljük ki, mégpedig a 126 db ötös mindegyike legalább egy szelvényen legyen kijelölve. Könnyen látható, hogy ekkor bármely két szelvény tartalmaz közös számot, mégsem találhatunk a mondott tulajdonsággal rendelkező számnégyest.

2. Ha veszünk 5^5 db különbözőképpen kitöltött lottószelvényt, úgy hogy bármely kettőnek van közös eleme, akkor világos, hogy van 5 olyan szám, hogy minden lottószelvény tartalmazza ezen 5 szám közül legalább az egyiket. Pl. akármelyik lottószelvényen megjelölt 5 szám megfelel. Nehezebb (és éppen ez volt a feladat állítása), azt bizonyítani, hogy már 4 szám is található a kívánt módon.

Nem javítható-e a 4 tovább 3-ra, azaz nem igaz-e, hogy mindig van 3 olyan szám, hogy mindegyik lottószelvény tartalmazza e 3 szám valamelyikét? Megmutatjuk, hogy nem.

Rendezzük el az 1-től 10-ig terjedő számokat az alábbi séma szerint:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 2 & & 3 & & \\ & 4 & & 5 & & 6 & \\ 7 & & 8 & & 9 & & 10 \end{array}$$

Válasszuk ki ezek után az összes olyan számnégyest, amit úgy kapunk hogy valamelyik szintről az összes számot vesszük, minden alatta levő szintről 1–1 számot veszünk, a fölötte levő szintekről pedig nem veszünk számokat.

Ilyen négyesek pl.:

$$\begin{array}{cccr} 1 & 2 & 5 & 8 \\ 1 & 2 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 10 \\ 4 & 5 & 6 & 8 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \end{array}$$

Összesen

$$\frac{4!}{1!} + \frac{4!}{2!} + \frac{4!}{3!} + \frac{4!}{4!} = 4 \cdot 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 4 + 1 = 41$$

ilyen számnégyes van. Könnyen látszik, hogy bármely kettőnek van közös eleme, és nem található 3 olyan szám, hogy mind a 41 számnégyes tartalmazná ezen 3 szám valamelyikét.

Vegyük ezután hozzá mindegyik négyeshez a 11-től 90-ig terjedő számok mindegyikét. Így

$$41 \cdot 80 = 3280$$

számötöst kapunk úgy, hogy bármely kettőnek van közös eleme és nincs 3 olyan szám, hogy mindegyik számötös tartalmazná e 3 szám valamelyikét. E számötösök száma még több is, mint a kívánt $3125 = 5^5$. Ha azt akarjuk, hogy számuk pontosan 3125 legyen, hagyjunk el 155 db-ot közülük, csak arra vigyázva, hogy az elhagyás után is még mind a 41 számnégyest legalább egy megmaradt számötös tartalmazza. Nem nehéz belátni, hogy ez a konstrukció rendelkezik a kívánt tulajdonsággal.

3. Mint látható, a feladat bizonyításában nem használtuk ki, hogy éppen 90 szám közül választhatók az ötösök. Valójában azt bizonyítottuk, hogy akárhogy választunk (bármely elemekből képzett) 5^5 db 5-elemű halmazt úgy, hogy bármely két halmaznak van közös eleme, akkor mindig található 4 olyan elem, hogy mind az 5^5 db halmaz mindegyike tartalmazza e 4 elem közül legalább az egyiket.

Általánosabban a következő igaz: ha van n^n db n elemű halmaz ($n \geq 2$) úgy, hogy bármely kettőnek van közös eleme, akkor található $(n-1)$ db elem úgy, hogy bármely halmaz tartalmazza ezen $(n-1)$ elem közül legalább az egyiket. Ennek bizonyítása teljesen megegyezik a fent közölt bizonyítással, csak éppen az ott szereplő gondolatmenetet nem 5, hanem n lépésen keresztül kell megismételni.

4. Az eddig tárgyalt problémakör matematikai tartalma még általánosabban a következő: Ha vannak n elemű halmazok úgy, hogy bármely kettőnek van közös eleme, továbbá tudjuk, hogy nem található n-nél kevesebb elem úgy, hogy mindegyik halmaz tartalmazza ezen elemek valamelyikét, akkor ezek az n elemű halmazok nem lehetnek sem túl sokan, sem túl kevesen.

Mennyi itt a „túl sok"? A 3. megjegyzésben láttuk, hogy n^n-t már biztosan nem érheti el a számuk. Másrészt a 2. megjegyzésben leírt konstrukciót n szintből álló számháromszögre általánosítva látjuk, hogy

$$\frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \ldots + \frac{n!}{n!} = \big[(e-1) \cdot n!\big]$$

n elemű halmaz még található a fent leírt módon.

(Itt $e = 2{,}71828\ldots$ és $[x]$ jelöli a legnagyobb olyan egész számot, amelyik nem nagyobb x-nél.)

Nagy n-re $\big[(e-1) \cdot n!\big]$ sokkal kisebb, mint n^n. Hogy $\big[(e-1) \cdot n!\big]$ és n^n között hol kezdődik a „túl sok", nem tudjuk.

Mennyi a „túl kevés"? Nem nehéz belátni, hogy $2(n-1)$ már túl kevés. Ha ugyanis legfeljebb ennyi halmazunk van, akkor kettenként választhatunk hozzájuk egy-egy elemet, ami annak a kettőnek mindegyikében benne van, (hiszen bármely két halmaznak van közös eleme) és így legfeljebb $(n-1)$ elemre lesz szükségünk.

Véges projektív síkok[3] segítségével tudunk olyan halmazszámot is megadni, amennyi már nem „túl kevés". Vegyünk egy olyan véges projektív síkot, amelyen minden egyenesnek n pontja van. Ilyen mindig található, ha $n-1$ prímhatvány. Az egyenesek lesznek a szóban forgó n-elemű halmazok, számuk n^2-n+1. Bármely kettő metszi egymást, és nem nehéz belátni, hogy nem adható meg úgy $(n-1)$ pont, hogy minden egyenes tartalmazza legalább az egyiket közülük. Finomabb módszerek alkalmazásával Erdős Pál és Lovász László kimutatta, hogy a „túl kevés" valahol $\frac{8}{3}n-3$ és $c\cdot n^{3/2}\cdot\log\, n$ között ér véget, ahol c alkalmas konstans. Hogy pontosabban hol van ez a határ, az ez idő szerint szintén nem ismeretes.

Harmadik feladat. *Tegyük fel, hogy egy másodfokú (valós együtthatós) polinom minden (valós helyen felvett) helyettesítési értéke pozitív. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a polinom előállítható két pozitív együtthatós polinom hányadosaként.*

I. megoldás. Legyen a kérdéses polinom

$$f(x)=ax^2+bx+c.$$

A feladat másodfokú polinomról szól, tehát $a\neq 0$. Ha a polinom csak pozitív értékeket vesz fel, akkor

$$f(0)=c>0.$$

Megmutatjuk, hogy a is pozitív. Írjuk f-et

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a^2} \tag{1}$$

alakban. Itt az utolsó két tag állandó. Az első tag második tényezője tetszés szerint naggyá tehető x alkalmas megválasztásával. Így ha a negatív volna, akkor a polinom venne fel negatív értéket is.

Feltehetjük, hogy $a=1$, mert f és $\frac{1}{a}f$ mindegyike a másikból egy pozitív számmal való szorzással kapható. Ez a művelet pozitív együtthatós polinomok hányadosát újra ilyenbe viszi át, ha pl. a hányados számlálóját szorozzuk a számmal.

Ha b pozitív, akkor az 1 konstans polinom nevezővel kapunk egy kívánt alakú előállítást. Ellenkező esetben célszerű az (1) előállításban szereplő $\frac{b}{2}$-t jelölni $(-d)$-vel és a konstanst is egy betűvel, mondjuk h-val. Ekkor (1) így alakul:

$$f(x)=(x-d)^2+h. \tag{1'}$$

Itt $d\geq 0$ és $f(d)=h>0$.

A feladat állításának igazolásához elég egy olyan pozitív együtthatós polinomot találni, amelyikkel f-et megszorozva a szorzat is pozitív együtthatós lesz.

Ha $d=0$, akkor pl. $x+1$ nyilvánvalóan megfelel a követelményeknek.

Ha $d>0$, akkor próbálkozzunk az

$$\left(x^n+dx^{n-1}+\ldots+d^{n-1}x+d^n\right)^2 \tag{2}$$

polinommal. Ha $(1')$ első tagját szorozzuk, akkor

$$\left(x^{n+1}-d^{n+1}\right)^2=x^{2n+2}-2d^{n+1}x^{n+1}+d^{2n+2}$$

adódik. Ehhez kell még (2)-nek a h-szorosát adnunk. Ebben a polinomban x minden hatványa fellép a 0-adfokútól a $2n$-edfokúig pozitív együtthatóval.

Azt kell megnéznünk, tudjuk-e n-et úgy választani, hogy a kapott polinomban az $(n+1)$-edfokú tag együtthatója nagyobb legyen, mint $2d^{n+1}$.

Ha (2)-t két egyenlő tényező szorzataként képzeljük el, akkor az első k-adfokú tagját a második $(n+1-k)$-adfokú tagjával szorozva kapunk $(n+1)$-edfokú tagot. Ez lehetséges, ha $k=1,2,\ldots,n$. Mindegyik esetben $d^{n-1}x^{n+1}$ lesz a szorzat, így $(1')$ és (2) szorzatában x^{n+1} együtthatója

$$nhd^{n-1}-2d^{n+1}=d^{n-1}(nh-2d^2).$$

[3] A véges projektív sík definíciója és elemi tulajdonságai megtalálhatók pl. a K.M.L. 51/2 (1975. október) számában az 53. oldalon kezdődő cikkben, vagy az alábbi szakköri füzetben:
Lovász–Pelikán–Vesztergombi: Kombinatorika. 2. kiadás (Tankönyvkiadó, Budapest, 1972. 128. old.)

Ez az együttható pozitív, ha

$$n > \frac{2d^2}{h}.$$

Ha így választjuk meg n-et, akkor tehát a szorzat pozitív együtthatós lesz, csak a $(2n+1)$-edfokú tag hiányzik belőle – 0 lesz az együtthatója. Ha még megszorozzuk a szorzatot pl. $(x+1)$-gyel, akkor már olyan polinomot kapunk, amelyikben a 0-adfokú tagtól a $(2n+3)$-adfokú tagig mindegyik szerepel pozitív együtthatóval. Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.

Megjegyzések. 1. Ha másodfokú polinomon legfeljebb másodfokút értünk, akkor sem lehet, hogy másodfokú tag nem lép fel ténylegesen, de elsőfokú igen, mert minden ilyen polinom vesz fel pozitív és negatív értéket is. Egy c pozitív konstans polinom viszont írható $\frac{c}{1}$ alakban mint két pozitív együtthatós polinom hányadosa.

2. Volt, aki megelégedett azzal, hogy a ténylegesen fellépő tagok együtthatója pozitív legyen, de megengedte, hogy egyes hatványok kimaradjanak, mint $(1')$ és (2) szorzatából a $(2n+1)$-edfokú tag. Ha ilyen alakig sikerült eljutni, akkor már nem nehéz a feladat szigorúbb követelményeit is kielégítő polinomhoz jutni. Könnyen látható, hogy ha egy nem-negatív együtthatós polinomot, amelyben két-két előforduló tag közt legfeljebb k darab hatvány hiányzik, megszorzunk pl. az

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^k$$

polinommal, akkor már nem lesz kimaradó hatvány a legmagasabb fokú tagig.

3. Nem csak x^2 együtthatóját választhatjuk 1-nek, x együtthatójának abszolút értékét is megváltoztathatjuk. Ha ugyanis x helyébe ry-t írunk egy pozitív r számmal, akkor

$$f(ry) = r^2\left(y^2 - \frac{b}{r}y + \frac{c}{r^2}\right).$$

Ha itt a második tényező előállítható pozitív együtthatós P_1 és P_2 polinomokkal $P_1(y)/P_2(y)$ alakban, akkor

$$f(x) = \frac{r^2 P_1\left(\frac{x}{r}\right)}{P_2\left(\frac{x}{r}\right)}$$

f-nek egy előállítása pozitív együtthatós polinomok hányadosaként. Így írhatjuk f-et pl. $x^2 - x + u$ vagy $x^2 - 2x + v = (x-1)^2 + w$, $(w = v - 1)$ alakban.

4. Láttuk, hogy a másodfokú polinom együtthatóitól függött, hogy hányadfokú számlálóval és nevezővel sikerül azt pozitív együtthatós polinomok hányadosaként írni. A fenti eljárásban a szorzó polinom N fokszáma (az előállítás nevezőjéé)

$$N = 2n + 1 > \frac{4d^2}{h} + 1.$$

Az $x^2 - 2x + 1{,}1 = (x-1)^2 + 0{,}1$ polinom esetén pl. ez legalább 42-edfokú szorzót jelent. Az

$$\begin{gathered}(x^2 - 2x + 1{,}1)(x^9 + 2{,}01x^8 + 2{,}93x^7 + 3{,}65x^6 + 4{,}08x^5 + 4{,}15x^4 + 3{,}813x^3 + 3{,}062x^2 + \\ + 1{,}93x + 0{,}492) = x^{11} + 0{,}01x^{10} + 0{,}01x^9 + 0{,}001x^8 + 0{,}003x^7 + 0{,}005x^6 + \\ + 0{,}001x^5 + 0{,}001x^4 + 0{,}0003x^3 + 0{,}0002x^2 + 1{,}139x + 0{,}5412, \\ (x^2 - 2x + 1{,}1)(1 + 1{,}82x + 2{,}41x^2 + 2{,}73x^3 + 2{,}78x^4 + 2{,}573x^5 + 2{,}151x^6 + 1{,}572x^7 + \\ + 0{,}903x^8 + 2{,}13x^9 = 1{,}1 + 0{,}002x + 0{,}011x^2 + 0{,}003x^3 + 0{,}008x^4 + 0{,}0003x^5 + \\ + 0{,}0001x^6 + 0{,}0002x^7 + 0{,}0003x^8 + 0{,}0003x^9 + 0{,}477x^{10} + 0{,}213x^{11},\end{gathered}$$

azonosságok azt mutatják, hogy már 9-edfokú polinomok is megfelelnek (két egészen különböző felépítésű is). Az sincs kizárva, hogy még alacsonyabb fokúval is célt lehetne érni.

II. megoldás. A harmadik megjegyzés szerint írhatjuk a másodfokú polinomot $x^2 - 2x + v$ alakban. Ez csak pozitív értékeket vesz fel, ha $v > 1$.

A második megjegyzés értelmében elég olyan nem-negatív együtthatós polinomot keresni, amivel ezt a polinomot megszorozva a szorzat is nem-negatív együtthatós lesz. Ezt a polinomot

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

alakban keresve feltehetjük, hogy $a_0 = 1$. Az a_i-knek olyan nem-negatív számoknak kell lenniük, amelyekre

$$a_1 v - 2a_0 \geq 0, \quad a_i v - 2a_{i-1} + a_{i-2} \geq 0, \quad \text{ha} \quad i = 2, \ldots, n, \quad \text{és} \quad -2a_n + a_{n-1} \geq 0.$$

Keressünk olyan a_i-ket, amelyekre az első n feltételben egyenlőség áll fenn és próbáljuk n-et úgy választani, hogy az utolsó feltétel is teljesüljön. Legyen tehát

$$(3) \qquad a_1 = \frac{2a_0}{v} = \frac{2}{v}, \qquad a_i = \frac{2a_{i-1} - a_{i-2}}{v} \qquad i = 2, \dots, n.$$

Kérdés, megválasztható-e n úgy, hogy az utolsó egyenlőtlenség is teljesüljön. Ez az egyenlőtlenség azt jelenti, hogy ha a fenti szabályosság szerint még az $(n+1)$-edik elemet is képezzük a sorozatban, az már nem lesz pozitív.

A $b_i = \dfrac{a_i}{a_{i-1}}$ hányadosokra (3) a következő összefüggéseket adja:

$$b_1 = \frac{a_1}{a_0} = a_1 = \frac{2}{v}, \qquad b_i = \frac{2 - \dfrac{1}{b_{i-1}}}{v} \qquad i = 2, \dots, n.$$

Olyan n-re van szükségünk, amelyre

$$\frac{1}{b_n} \geq 2, \qquad \text{azaz} \qquad b_n \leq \frac{1}{2}.$$

Ismeretes és könnyen belátható, hogy minden pozitív u-ra

$$u + \frac{1}{u} \geq 2 \qquad \text{azaz} \qquad 2 - \frac{1}{u} \leq u.$$

Ezt felhasználva

$$b_i = \frac{2 - \dfrac{1}{b_{i-1}}}{v} \leq \frac{b_{i-1}}{v}.$$

Ezt az egyenlőséget $(i-1)$-szer alkalmazva azt nyerjük, hogy

$$b_i \leq \frac{b_1}{v^{i-1}} = \frac{2}{v^i}.$$

Mivel $v > 1$, így van egyenlőtlenségünk szerint olyan n, amelyikre $b_n \leq \dfrac{1}{2}$, és már láttuk, hogy elég a legkisebb ilyen n értéket megkeresnünk. Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.

Megjegyzés. Lényegében a fenti gondolatmenet szerint készült az I. megoldás utáni 4. megjegyzés első példája, azzal a módosítással, hogy a szorzat együtthatóit nem tettük 0-vá, csak v-hez képest nagyon kicsivé, hogy utólag ne kelljen még egy magas fokú polinommal szorozni ahhoz, hogy szigorúan a feladat feltételeinek megfelelő polinomokhoz jussunk.

Eljárhatnánk úgy is, hogy a_n-t választjuk 1-nek, és ezután a végétől visszafelé haladva határozzuk meg az együtthatókat pl. úgy, hogy mindenütt egyenlőség teljesüljön. Eközben n értékét határozatlanul hagyjuk, addig haladunk, amíg az utolsó két nyert értékre már az első egyenlőtlenség is teljesül. Ezen az alapon készült az említett megjegyzés második példája.

III. megoldás (vázlat). Ismét azt mutatjuk meg, hogy találhatunk másodfokú polinomunkhoz olyan nem-negatív együtthatós polinom szorzót, amivel szorozva a szorzat is nem-negatív együtthatós lesz.

A másodfokú polinomot írhatjuk

$$(4) \qquad x^2 - bx + c$$

alakban, ahol b és c pozitív. Akkor lesz a polinom minden értéke pozitív, ha

$$(5) \qquad b^2 < 4c.$$

Szorozzuk meg (4)-et az $x^2 + bx + c$ polinommal. A szorzat

$$x^4 - (b^2 - 2c)x^2 + c^2.$$

Ha $b^2 \leq 2c$, akkor ezzel célt is értünk. Ha $2c < b^2 (< 4c)$, akkor szorozzunk még $x^4 + (b^2 - 2c)x^2 + c^2$-tel; a szorzat

$$x^8 - \left((b^2 - 2c)^2 - 2c^2\right)x^4 + c^4.$$

Itt x^4 szorzója

$$\left(b^2 - (2 + \sqrt{2})c\right)\left(b^2 - (2 - \sqrt{2})c\right),$$

tehát elértük célunkat, ha $b^2 \leq (2 + \sqrt{2})c$, mert a második tényező feltételei szerint pozitív. Ha nem, akkor folytatni kell az eljárást. Kérdés, hogy eljutunk-e így véges számú lépésben nem-negatív együtthatós szorzathoz.

Az n-edik lépés után ilyen alakú szorzatot kapunk:

$$x^{2^{n+1}} - b_n x^{2^n} + c^{2^n}.$$

A b_n-ek sorozata a

$$b_{n+1} = b_n^2 - 2c^{2^n} \tag{6}$$

képzési szabály szerint keletkezik a $b_0 = b$ kezdő értékből kiindulva.

Azt szeretnénk belátni, hogy tetszés szerinti (5)-öt kielégítő pozitív b, c értékekből kiindulva b_n elég nagy n-re negatív lesz. Ehhez b_n-et szorzat alakban írjuk. Ezt b_4 esetében így tehetjük:

$$b_4 = \left(\left((b^2-2c)^2-2c^2\right)^2-2c^4\right)^2-2c^8 = \left(\left((b^2-2c)^2-2c^2\right)^2-2c^4-\sqrt{2}c^4\right)\left(b_3+\sqrt{2}c^4\right) =$$
$$= \left((b^2-2c)^2-2c^2-\sqrt{2+\sqrt{2}}c^2\right)\left(b_2+\sqrt{2+\sqrt{2}}c^2\right)\left(b_3+\sqrt{2}c^4\right) =$$
$$\left(b^2-\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)c\right)\left(b_1-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}c\right)\left(b_2+\sqrt{2+\sqrt{2}}c^2\right)\left(b_3+\sqrt{2}c^4\right).$$

Itt egy újabb sorozat lépett fel. Ennek a képzési szabályát kicsit általánosabban, mint ahogy számításainkban szerepel, így adhatjuk meg: legyen tetszés szerinti pozitív z kiindulási értékkel

$$a_1(z) = z \qquad \text{és} \qquad a_{n+1}(z) = 2 + \sqrt{a_n(z)}, \qquad \text{ha} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Ekkor a fenti szorzatban az

$$a_n = a_n(2)$$

sorozat néhány tagja szerepel.

Könnyű látni, hogy adott z értékre az $a_n(z)$ értékek n növekedtével növekednek, és hogy adott n-re z növekedtével $a_n(z)$ is növekszik. Teljes indukcióval belátható, hogy minden n-re $a_n(4) = 4$, így

$$a_n = a_n(2) < a_n(4) = 4,$$

minden n-re.

A b_4-re talált fenti előállításhoz hasonlóan minden b_n szorzattá alakítható. Az első tényező $b^2 - a_n c$ lesz, és ezt kell szorozni $b_k + \sqrt{a_{n-k}}c^{2^{k-1}}$ alakú tényezőkkel a $k = 1, 2, \ldots, n-1$ értékekre. Ezt röviden így jelöljük:

$$b_n = (b^2 - a_n c)\prod_{k=1}^{n-1}\left(b_k + \sqrt{a_{n-k}}c^{2^{k-1}}\right)$$

Ezt ismét teljes indukcióval lehet belátni.

Az (5) feltétel szerint b^2/c egy 4-nél kisebb érték. Azt kell belátnunk, hogy a_n vesz fel alkalmas n-re ennél nagyobb értéket. Ha ez igaz, akkor a legkisebb ilyen n-et n_0-val jelölve az n_0-nál kisebb indexű b-k pozitívok, viszont b_{n_0} negatív, s így n_0-szor ismételve szorzási eljárásunkat, nem-negatív együtthatós polinomhoz jutunk.

Tudjuk, hogy a_n is kisebb 4-nél minden n-re. Megmutatjuk azonban, hegy elég nagy n-re tetszés szerint közel jut 4-hez. Valóban, ha $n > 1$, akkor

$$0 < 4 - a_n = 2 - \sqrt{a_{n-1}} = \frac{4 - a_{n-1}}{2 + \sqrt{a_{n-1}}} = \frac{4 - a_{n-1}}{a_n} < \frac{4 - a_{n-1}}{2}.$$

Alkalmazva ezt az egyenlőtlenséget újra és újra, egyre csökkenő indexekkel végül azt kapjuk, hogy

$$4 - a_n < \frac{4 - a_1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-2}},$$

ez pedig tetszés szerint kicsi, ha n elég nagy. Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.

Megjegyzés. Ha itt az n-edik lépés után állunk meg, akkor a szorzatban a hiányzó egymás utáni hatványok száma $2^n - 1$ lesz, így a szorzó polinom fokszáma, ha pontosan a feladatban kitűzött célt akarjuk elérni,

$$2 + 2^2 + \ldots + 2^n + 2^n - 1 = 3(2^n - 1)$$

lesz. A megoldás gondolatmenete szerint biztosan célt érünk, ha n-et úgy választjuk, hogy

$$\frac{1}{2^{n-2}} < 4 - \frac{b^2}{c}$$

teljesüljön. Ez az I. megoldás utolsó megjegyzésének példája esetében 33-adfokú szorzó polinomot jelent az I. meggondolás gondolatmenetéből adódó 42-edfokúval (másfelől a megjegyzésben adott 9-edfokúval) szemben.

A feltételeket az I. megoldásban szereplő d és h együtthatókra átírva általában is az ottani korlát 3/4-e adódik ezen az úton. Ennél azonban lényegesen jobb becslés is kiolvasható n-re a követett gondolatmenetből.

Ismételten alkalmazva a talált összefüggést, azt nyerjük, hogy

$$4-a_n=\frac{4-a_{n-1}}{a_n}=\frac{4-a_1}{a_n a_{n-1}\dots a_2}=\frac{2}{a_n a_{n-1}\dots a_2}.$$

Ha itt a nevező tényezőit nem 2-vel, hanem a legkisebbikkel, $a_2=2+\sqrt{2}>3{,}41$-dal behelyettesítjük, máris a

$$\frac{2}{3{,}41^{n-1}}<4-\frac{b^2}{c},\qquad 3{,}41^{n-1}>\frac{2c}{4c-b^2}$$

egyenlőtlenséget kapjuk n meghatározására.

Az említett másodfokú polinom esetében legegyszerűbb ténylegesen elvégezni a beszorzásokat, és azt találjuk, hogy ezen az úton 21-edfokú polinommal érünk célhoz.