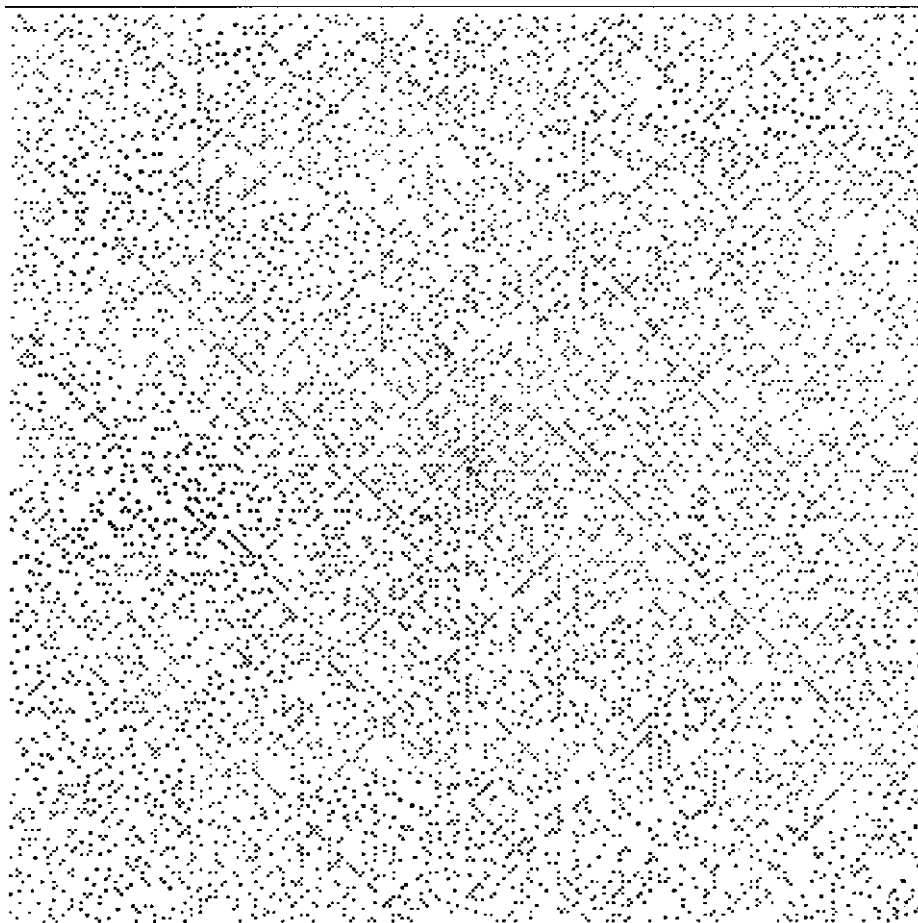


S. M. Ulam amerikai matematikus egy szabad délelőttjén egy kockás papírra csigavonalban felírta a természetes számsor elejét, majd a prímszámokat jelölte, úgy, ahogyan az az ábrán látható.

73	72	71	70	69	68	67	66	65	100
74	43	42	41	40	39	38	37	64	99
75	44	21	20	19	18	17	36	63	98
76	45	22	7	6	5	16	35	62	97
77	46	23	8	1	4	15	34	61	96
78	47	24	9	2	3	14	33	60	95
79	48	25	10	11	12	13	32	59	94
80	49	26	27	28	29	30	31	58	93
81	50	51	52	53	54	55	56	57	92
82	83	84	85	86	87	88	89	90	91

Furcsának találta, hogy a prímek mennyire kedvelik az átlós elhelyezkedést. S hogy ez mennyire így van, azt hátsó borítónkon láthatjuk, ahol egészen 90 000-ig rajzoltuk fel „Ulam spirálisát”.



Hogy miért van ez? Még senki sem tudja.

A 2-nél nagyobb prímek mind páratlanok, így két egymás utáni prímszám között legalább 2 különbségnek kell lennie. Ha ez az eltérés pontosan kettő, a prímeket szomszédosaknak, ikreknek nevezzük. Ikerprímek például a 71 és 73, a 209 267 és 209 269 vagy az 1 000 000 009 649 és 1 000 000 009 651 számok. Akármennyig vizsgálták a prímeket, mindig újabb és újabb ikerprímek bukkantak fel. De bizonyítani, hogy végtelen sok van belőlük, még senkinek nem sikerült.

P. L. Csebisev (1821–1894) orosz matematikus bizonyította be először, hogy minden n természetes számra n és $2n$ között van prím ($n \geq 2$). Ugyanerre a tételre Erdős Pál egy igen egyszerű és szellemes bizonyítást talált, amely a Középiskolai Matematikai Lapok első két kötetében olvashatók (Kalmár László: Bizonyítsuk be a Csebisev-tételt, KÖMAL 1. kötet 89., 127., 176. oldal, 2. kötet 7., 90., 121. oldal). Azt is bebizonyították, hogy elég nagy n -től n és $1,001n$ között is van prím, sőt minden $\varepsilon > 0$ valós számhoz elég nagy n -re n és $(1 + \varepsilon)n$ között is található prím szám. De arra a kérdésre, hogy vajon n^2 és $(n + 1)^2$ között mindig van-e prím, még mindig nem ismerjük a választ.

Tudjuk, hogy végtelen sok $2k + 1$ alakú prímszám van. Nem nehéz belátni azt sem, hogy végtelen sok $6k - 1$ alakú prím van. De vajon végtelen sok $10k + 1$ alakú prímszám van-e? P. G. L. Dirichlet (1805–1859) német matematikus bizonyította be azt a nagy jelentőségű és fontos tételt, hogy ha a és b relatív prím egész számok, akkor végtelen sok $a + kb$ alakú prímszám van. Ezt az eredményt úgy is fogalmazhatjuk, hogy minden olyan egész együtthatós első fokú polinom, melynek együtthatói relatív prímek, végtelen sok egész helyen vesz föl prímszám-értéket. Azt azonban nem tudjuk, hogy van-e egyáltalán olyan *legalább másodfokú* egész együtthatós polinom, ami végtelen sok egész helyen vesz föl prímszám-értéket. Viszont azt tudjuk, hogy van olyan *többszörös*, egész együtthatós polinom, melynek az egész helyen felvett helyettesítési értékei közül a pozitívak éppen a prímszámokat adják ki és mindegyiket pontosan egyszer.

C. F. Gauss (1777–1855), akit a matematika fejedelmének is neveznek, 19 éves korában oldotta meg a szabályos sokszögek szerkeszthetőségének évezredek óta vajdó problémáját. Bizonyította, hogy pontosan azok a prímszámú szabályos sokszögek szerkeszthetők, melyek oldalszáma $2^{2^n} + 1$ alakban írható. Így szerkeszthető 3, 5, 17, 257 és 65 537 oldalú sokszög, de nem szerkeszthető például 7, 11, 13 stb. oldalú. Szabályos három- és ötszöget szerkeszteni mindenki tud. A szabályos 17-szög szerkesztésének leírása és a szerkesztés helyességének bizonyítása úgy 3 oldalt tesz ki (lásd KÖMAL 39. kötet 25–28. oldal). A 257 oldalúé 80 oldalt, a 65 537 oldalúé pedig a göttingai egyetemen tíz nagy ládába zárva található – ez utóbbira eddig még senki sem volt kíváncsi. A $2^{2^n} + 1$ alakú prímeket Fermat-féle prímeknek nevezzük, mivel P. Fermat (1601–1655) francia matematikus azt sejtette, hogy az összes ilyen alakú szám prím. Leonhard Euler (1707–1783), aki Gauss mellett a 18. század másik nagy matematikusa volt, vette magának a fáradságot, hogy ellenőrizze vajon a $2^{2^n} + 1$ sorozat ötödik eleme, $2^{32} + 1 = 4\,294\,967\,297$ valóban prím-e. Azt találta, hogy ez a szám 641-gyel osztható, és így nem prím. Elektromos számológépekkel egészen $n = 30$ -ig vizsgálták meg a Fermat-féle számokat, és egyetlen további prímet sem találtak a már ismerteken kívül. Van-e még a Fermat-féle számok között prím egyáltalán? Ha igen, végtelen sok-e? Ezt ma még senki sem tudja.