

16. Mi az a legnagyobb szám, amit négy darab 7-sel, műveleti jelek alkalmazása nélkül fel lehet írni?

17. Egy nap alatt hányszor fordulhat elő, hogy ha az óramutatókat felcseréljük, a felcserélt mutatók olyan időt mutatnak, ami a valóságban létezik? (Másodpercmutató nincs az órán.)

18. Egy háromszög  $AB$  oldalán végigfut egy  $P$  pont.  $P$ -ből párhuzamost húzunk  $AC$ -vel, illetve  $BC$ -vel. Mi az így kapott  $AP$ , illetve  $BP$  alapú háromszögek körülírt körei metszéspontjának a mértani helye?

19. Milyen háromszögek esetében vannak a magasságszakaszok felezőpontjai egy egyenesen?

20. Oldjuk meg az egész számok körében az  $10x^2 + 10y^2 + 101xy + 10x + y = 1971$  egyenletet.

21. Mutassuk meg, hogy ha egy derékszögű háromszög befogói  $a$ ,  $b$ , átfogója  $c$ , akkor

$$a^7 + b^7 + c^7 = a^3b^3(a+b) + b^3c^3(b+c) + a^3c^3(a+c) - 2a^2b^2c^2(a+b+c).$$

22. Az  $ABC$  háromszög  $C$  csúcsából induló magasságának, szögfelezőjének, súlyvonalának metszéspontja a körülírt körrel  $D$ ,  $E$ ,  $F$ . Szerkesszük meg a háromszöget, ha adott  $D$ ,  $E$ ,  $F$ .

23. Bizonyítsuk be, hogy  $(a-1)^2$  minden  $n$  természetes számra osztója  $a^n - an + n - 1$ -nek.

24. Mutassuk meg, hogy  $(n!)^2 \geq n^n$ .

25. Adott a síkon négy pont úgy, hogy bármely kettő távolsága legalább 1. Bizonyítsuk be, hogy a közöttük levő legnagyobb távolság legalább  $\sqrt{2}$ .

26. Mutassuk meg, hogy egy szám összes osztójának száma pontosan akkor páratlan, ha ez a szám teljes négyzet.

27. Egy útkeresztelkedésnél az út kétfelé ágazik el. Meg szeretnénk kérdezni, melyik a helyes út. Az útkeresztelkedésben két ember áll, az egyik mindig igazat mond, a másik mindig hazudik. Megtudhatjuk a helyes utat egyetlen kérdéssel?

28. Mutassuk meg, hogy ha  $n \geq 3$ , akkor  $\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$ .

29. 12 pénzdarab közül egy hamis, azaz más súlyú, mint a többi. Három méréssel határozzuk meg, melyik az, és hogy nehezebb vagy könnyebb!

30. Hány darab és milyen súlyok szükségesek ahhoz, hogy egy kétkarú mérleggel 40 kg-ig minden egész kilogrammot mérni tudjunk?

31. Adott három pozitív számnak a számtani, a mértani és a négyzetes közepe. Számítsuk ki a három számot!

32. Hányféleképpen lehet a sakktáblán a két királyt elhelyezni úgy, hogy azok ne üssék egymást?

33. Bizonyítsuk be, hogy minden természetes szám felírható három darab kettes számjeggyel, matematikai jelekkel és szimbólumokkal.

34. Határozzuk meg a tetraéder belsejében azon pontok mértani helyét, amelyeknek a négy lapsíktól vett távolságaik összege állandó!

35. Adott egy háromszög magasságpontjának a három oldalra való tükröképe. Szerkesszük meg ezekből a háromszöget!

36. Milyen  $p$  prímszámmal lesz  $p^2 + 2$  ismét prim?

37. Bizonyítsuk be, hogy minden egyenlő oldalú rácssokszög (minden csúspontja rácspont) páros oldalú!

38. Adott az  $O$  középpontú  $k$  kör, a  $P$  és  $Z$  pontok. Szerkesszünk a  $k$  körön olyan  $X$  pontot, hogy a  $PXZ$  szöget az  $OX$  egyenes felezze!

39. Egy háromszögben fejezzük ki az oldalakkal a szögfelezők háromszögbe eső darabjainak a hosszát!

40. Bizonyítsuk be, hogy  $2x + 3y$  és  $9x + 5y$  az  $x$  és  $y$  ugyanazon értékeire osztható 17-tel!

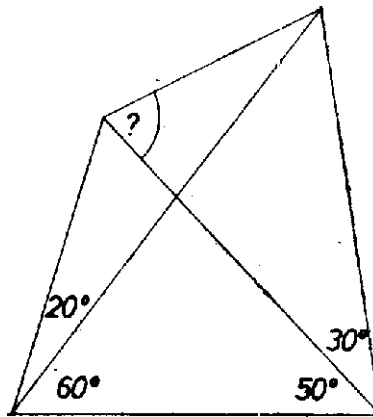
41. Adott egy háromszög magasságvonalainak talppontja. Szerkesszük meg a háromszöget!

42. Adott egy háromszög belsejében a  $P$  és  $Q$  pont.  $P$ -ből menjünk el  $Q$ -ba a legrövidebb olyan úton, amely érinti a háromszög mindhárom oldalát!

43. Az  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ , pontok egy síkban vannak,  $P$  pedig nincs ebben a síkban. A  $Q$  pontra igaz, hogy  $\overrightarrow{PQ} = (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PE})/5$ . Mutassuk meg, hogy  $Q$  is benne van  $A$ ,  $B$ ,  $C$  síkjában!

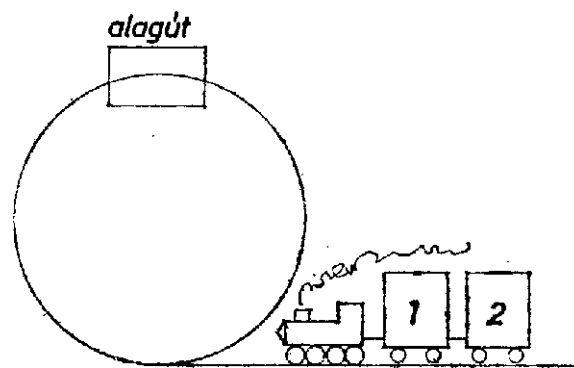
44. Adott egy trapéz négy szöge, valamint az egyik átló és egy alap szöge. Mekkora a két átló által bezárt szög?

45. Hány fokok az 1. ábrán ?-vel jelölt szög?



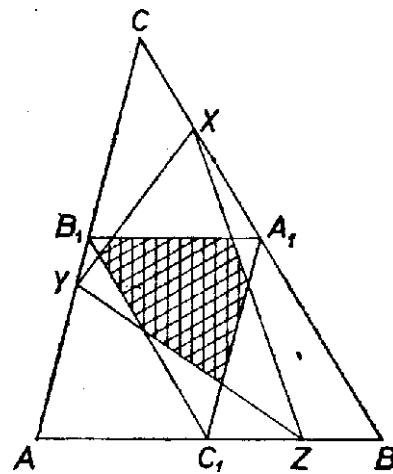
1. ábra

46. Cseréljük meg a 2. ábrán az 1-es és 2-es kocsikat, ha az alagúton csak a mozdony fér át!



2. ábra

47. Az  $ABC$  háromszög oldalfelező pontja rendre  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ . Válasszuk meg az  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  pontokat a 3. ábrán látható szakaszokon úgy, hogy a vonalkázott rész területe a lehető legkisebb legyen!



3. ábra