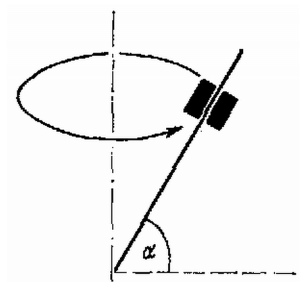
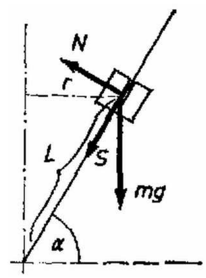
1. feladat. *Egy rúd ω állandó szögsebességgel forog egy függőleges tengelyhez rögzítve. A rúd a függőleges tengellyel $(90^\circ - \alpha)$ szöget zár be (1. ábra). A rúdon egy m tömegű test csúszhat, a csúszási súrlódási együttható μ. Mi a feltétele annak, hogy forgás közben a test a rúd ugyanazon a helyén maradjon?*



1. ábra

Megoldás. A test legyen L távolságra a rúd alsó végétől, körpályájának sugara $r = L\cos\alpha$ (2. ábra).



2. ábra

Ha a test a felfelé csúszás határán van, a mozgásegyenletek:

$$mr\omega^2 = N\sin\alpha + S\cos\alpha,$$
$$0 = mg - N\cos\alpha - S\sin\alpha.$$

Az S súrlódási erőt és az N nyomóerőt az

$$S \le \mu N$$

feltételbe helyettesítve kapjuk, hogy

$$\mathrm{tg}\,(\alpha+\varepsilon) \ge \omega^2 r/g, \quad \text{ha} \quad \alpha+\varepsilon < \pi/2,$$

ahol az ε súrlódási határszöget a $\mu = \mathrm{tg}\,\varepsilon$ egyenlet adja meg. (Ha $\alpha+\varepsilon \ge \pi/2$ test már csak lefelé mozdulhat el.)

Hasonlóan tárgyalható a lefelé csúszás esete. A súrlódási erő előjele a mozgásegyenletekben megváltozik, így az egyenlőtlenség [mivel $\cos(\alpha-\varepsilon) > 0$] a

$$\mathrm{tg}\,(\alpha-\varepsilon) \le \omega^2 r/g$$

alakot ölti.

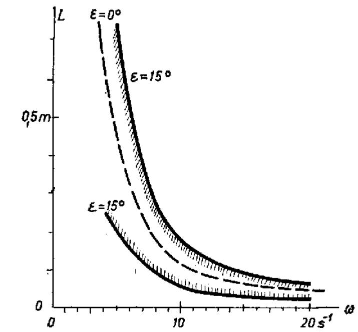
Összefoglalva, a test helyben maradásának feltétele:

$$\mathrm{tg}\,(\alpha+\varepsilon) \ge \frac{\omega^2 L\cos\alpha}{g} \ge \mathrm{tg}\,(\alpha-\varepsilon), \quad \text{ha} \quad \alpha+\varepsilon < \pi/2,$$
$$(\omega^2 L\cos\alpha)/g \ge \mathrm{tg}\,(\alpha-\varepsilon), \quad \text{ha} \quad \alpha+\varepsilon \ge \pi/2.$$

Elég bonyodalmas a négy változó szerepének a taglalása. Triviális, hogy nyugalomban levő rúd esetében, amikor $\omega = 0$, az állandó helyzet feltétele: $\varepsilon \ge \alpha$. Ha nincs súrlódás, $\varepsilon = 0$, csak ez a feltétel jelent egyensúlyt:

$$\frac{\omega^2 L\cos\alpha}{g} = \mathrm{tg}\,\alpha.$$

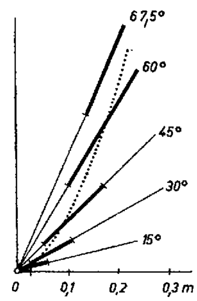
Egyébként a rúdon egy L_a-tól L_j-ig terjedő intervallumon belül marad meg a test változatlan helyen. Ha $\alpha \le \varepsilon$, akkor az alsó határ a tengelyben van. A 3. ábra adott, $\alpha = 30^\circ$-os rúdhelyzetnél mutatja meg az m tömegű test L távolságának nagyságát, mint ω függvényét. $\varepsilon = 0$-nál a szaggatott vonal mutatja a lehetséges egyensúlyi helyzeteket.



3. ábra

A súrlódás növekedésével mindig szélesebb sáv lép ennek helyébe, ábránkon $\mu = 0{,}268$, $\varepsilon = 15^\circ$ esete látható.

A 4. ábra egy $\omega = 10\ \mathrm{s}^{-1}$ szögsebességgel forgatott rudat mutat különböző helyzetekben; a súrlódási határszög ismét $\varepsilon = 15^\circ$. A rúd vastagon kihúzott részei jelzik azokat a helyeket, ahol a test a helyén marad.



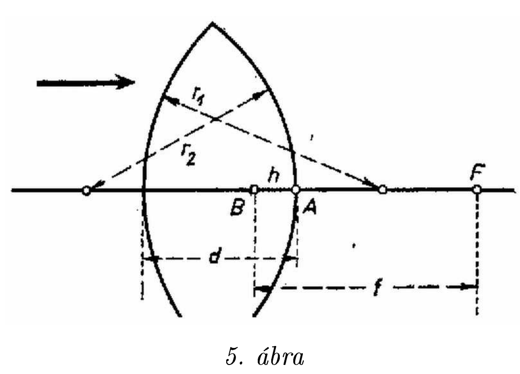
4. ábra

Az L_a alsó határ $\alpha = 15^\circ$-ig alul a tengelyben marad, aztán mindig jobban felfelé húzódik, a végtelenig. Az L_j felső határ $\alpha = 0^\circ$ esetében $\mu g/\omega^2$, azután mindig feljebb húzódik. 60°-nál 0,731, $67{,}5^\circ$-nál 1,944 (ezek a helyek nem fértek rá a rajzra). $\alpha = 90^\circ - \varepsilon = 75^\circ$ fölött a felső határ végtelen, a tömeg minden L_a-nál nagyobb távolságban a helyén marad. A középső, pontozott görbe a súrlódás nélküli esetben érvényes egyensúlyi helyzeteket jelöli meg.

A stabilitás kérdését illetően az a helyzet, hogy kilépve a nyugalmat jelentő sávból a test vagy felrepül a rúd végére, vagy leesik az aljára. A súrlódás nélküli esetben az egyensúlyi helyzet labilis. Függőleges rúd esetében súrlódás mellett is az egész rúdon labilis az egyensúlyi helyzet és a test leesik az origóba.

2. feladat. *Mi a feltétele annak, hogy egy vastag lencse gyújtótávolsága két különböző hullámhosszúságú fény esetében ugyanannyi legyen? Taglaljunk megvalósítható eseteket, figyelembe véve különböző alakú lencséket!*

Megoldás. Először idézzük fel a vastag lencsék tulajdonságait (1. például a K. M. L. 1967. évi 8–9. számának 163. oldalán). A lencse adatai: a gömbfelületek rádiusza r_1 és r_2 (homorú felszín esetében negatív), a vastagság d, a törésmutató n (5. ábra).



5. ábra

A fókusztávolság $f = BF$, amelyre

(1)
$$\frac{1}{f} = (n-1)\left[\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - d\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{r_1 r_2}\right].$$

A B főpont távolsága a felszíntől:

(2)
$$BA = h = \frac{d r_2}{n\,(r_1 + r_2) - d\,(n-1)}.$$

A lencse anyagának diszperziója van, ez azt jelenti, hogy különböző hullámhosszaknál más a törésmutató, λ_a-nál n_a, λ_b-nél n_b.

Az (1) összefüggést n hatványai szerint rendezve:

$$f\,(r_1 + r_2 - d)n^2 + [2fd - f\,(r_1 + r_2) - r_1 r_2]n - fd = 0.$$

Az egyenlet n-ben másodfokú, tehát általában megvan annak a lehetősége, hogy adott f-hez két n tartozhassék és a feladatot megoldjuk.

(1)-ből kifejezve a gyújtótávolságot:

$$f = \frac{n r_1 r_2}{(n-1)[n\,(r_1 + r_2) - d\,(n-1)]}. \tag{3}$$

A feladat kérdésére úgy válaszolunk, hogy ezt a fókusztávolságot n_a és n_b törésmutatókra számítjuk ki és ezeket egyenlővé tesszük:

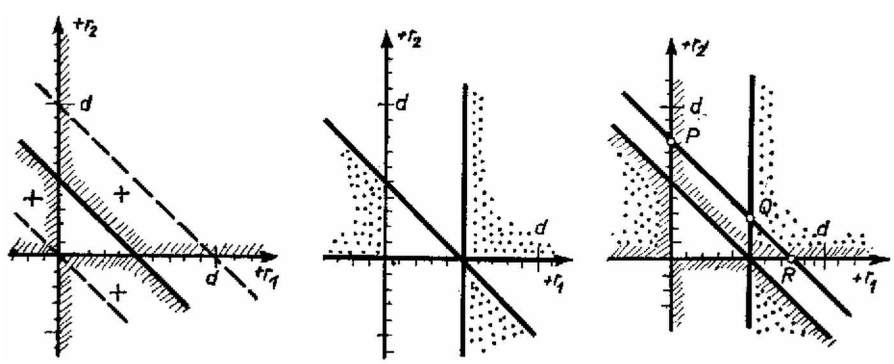
$$\frac{n_a r_1 r_2}{(n_a - 1)[n_a\,(r_1 + r_2) - d\,(n_a - 1)]} = \frac{n_b r_1 r_2}{(n_b - 1)[n_b\,(r_1 + r_2) - d\,(n_b - 1)]}.$$

Az egyenlet rendezése ezt az egyszerű feltételt adja:

$$r_1 + r_2 = d\left(1 - \frac{1}{n_a n_b}\right). \tag{4}$$

A taglalás első lépéseként látjuk, hogy plankonvex vagy plankonkáv lencse esetében a feltétel nem teljesülhet, mert a baloldal végtelen volna, a jobb oldal pedig mindenképpen véges. Mivel a törésmutatók 1-nél nagyobbak, a zárójeles rész 1-nél kisebb lesz, tehát a rádiuszok összege kisebb lesz a vastagságnál, így általában igen vastag lencséket kapunk. Érdekes, hogy az $n_a - n_b$ diszperzió nem szerepel a feltételben, csak a törésmutatók szorzata.

Áttekintés és taglalás céljából mérjük fel a koordinátatengelyekre r_1 és r_2 rádiuszokat d-ben mint egységben mérve (6. ábra).



6. ábra

Először általánosságban, egyetlen törésmutató esetében vizsgáljuk a problémákat és példaként $n = 2$ értéket tételezzünk fel, ami speciális flintüvegnél lehetséges. Megvizsgáljuk, mi a feltétele annak, hogy egy vastag lencse gyűjtőlencse legyen. Planparalel lemezként viselkedő lencsét akkor kapunk, ha $f = \infty$, vagyis (3) képletünk nevezője nulla:

$$(n-1)[n\,(r_1 + r_2) - d\,(n-1)] = 0.$$

Innen a feltétel:

$$r_1 + r_2 = d\,(1 - 1/n).$$

A 6. ábra első rajzán $n = 2$ esetében a vastag vonal tünteti fel az összetartozó értékpárokat, a ferde vonalat $r_1 = 0{,}5d$ és $r_2 = 0{,}5d$ között húzva ($n = 1$-nél az origón, $n = \infty$-nél a (d, d) pontokon mennének át ezek a ferde egyenesek). Gyűjtőlencsét akkor kapunk, ha $f > 0$, illetve $1/f > 0$. A (3) összefüggés alapján:

$$\frac{(n-1)[n\,(r_1 + r_2) - d\,(n-1)]}{n r_1 r_2} > 0.$$

Átrendezve:

$$\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2} > \frac{d}{r_1 r_2}\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Az első koordinátanegyedben akkor kapunk gyűjtőlencsét, ha r_1 és r_2 adatait a 6. ábra első rajzán látható vastag ferde vonal fölötti területről választjuk ki. Ha alatta választjuk ki, a vastag lencse két domború felülete ellenére szórólencse lesz. A többi koordinátanegyedben az előjelek tekintetében óvatosnak kell lennünk. A harmadik negyedben, ahol r_1

és r_2 negatív, a feltétel nem teljesülhet. A II. és IV. negyedben az egyenlőtlenség egy negatív tényezővel szorozva így alakul:

$$r_1 + r_2 < d\left(1 - \frac{1}{n}\right),$$

tehát itt a vastag vonal alatti területek jelentik a gyűjtőlencsét. Ábránkon a vonalkázás jelzi a gyűjtőlencsék tartományát.

Lencsénk használatakor praktikus kívánság, hogy a fókusz az üveganyagon kívülre essék. Ennek feltétele (2) és (3) alapján:

$$\frac{nr_1r_2}{(n-1)[n\,(r_1+r_2) - d\,(n-1)]} > \frac{dr_2}{n\,(r_1+r_2) - d\,(n-1)}. \tag{5}$$

A fókusz akkor esik a kilépő felületre, ha $h = f$, amiből könnyen adódik az $r_1 = d(1 - 1/n)$ feltétel. A 6. ábra második rajzán a 0,5d-nél húzott függőleges jelenti ezt. Az első koordinátanegyedben, ahol minden rádiusz pozitív, a fókusz az anyagon kívülre esik, ha $r_1 > d\,(1 - 1/n)$, vagyis az r_1r_2 pontnak a függőlegestől jobbra kell feküdnie. A többi koordinátanegyedben ismét óvatosnak kell lennünk. A III. negyedben a feltétel nem teljesülhet, mert (5) bal oldala itt negatív, jobb oldala pozitív. A II. negyedben egyszerűsíthetünk r_2-vel és az (5) alatti egyenlőtlenség csak úgy teljesülhet, ha a nevező a negatív:

$$n\,(r_1 + r_2) - d\,(n-1) < 0,$$

amiből következik az itt érvényes feltétel:

$$r_1 + r_2 < d\,(1 - 1/n).$$

A IV. negyed körülményeinek kivizsgálására írjuk fel f és h különbségét (3) és (2) felhasználásával:

$$\frac{nr_1r_2 - dr_2\,(n-1)}{(n-1)[n\,(r_1+r_2) - d\,(n-1)]} = r_2 \cdot \frac{r_1 - d\,(1-1/n)}{(1-1/n)[n\,(r_1+r_2) - d\,(n-1)]}.$$

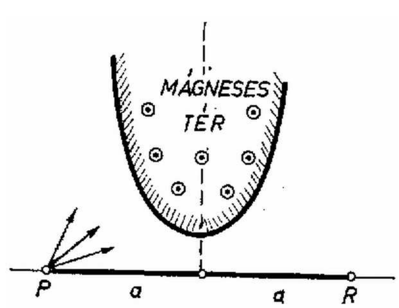
Minthogy r_2 negatív, ez a különbség csak úgy lehet pozitív, ha a nevező negatív, amiből következik:

$$r_1 + r_2 < d\,(1 - 1/n).$$

Egyéb esetek kirekeszthetők. A 6. ábra középső rajzán pontozás jelöli meg azokat a területeket, ahol a használható r_1, r_2 pontok feküsznek.

Ezután térjünk vissza eredeti problémánkra és rajzoljuk be ábránkba azon r_1, r_2 pontok mértani helyét, amelyekre n_a és n_b törésmutatók esetében egyezők a fókusztávolságok (6. ábra harmadik rajza). A (4) feltétel egy egyenest jelent, amely a tengelyeket $d(1 - 1/n_an_b)$ távolságokban metszi. (Legyen példánkban $n_a = 2{,}02$ és $n_b = 1{,}98$, ekkor $1 - 1/n_an_b = 0{,}75$.) Ezen az egyenesen P-től balra olyan konvex-konkáv (!) szórólencséket találunk, amelyek fókusza az üvegben van. P-től Q-ig olyan bikonvex gyűjtőlencsék következnek, amelyek fókusza még mindig az anyagban van. Q-tól R-ig a fókusz az anyagon kívül van, ezek bikonvex gyűjtőlencsék. R-től lefelé konvex-konkáv szórólencséket találunk, de fókuszuk az üvegben van. Valamelyest praktikus értelmük csak a QR közötti gyűjtőlencséknek van. Gyakorlatban ezek sem érnének sokat, mert hiába egyeznek a fókusztávolságok, ezeket a B főponttól kell felmérni, ennek helye pedig (3) szerint függ a törésmutatótól.

3. feladat. *P pontból egyenlő tömegű, egyenlő v sebességű ionok indulnak el különböző irányokban. Ezeket egy $PR = 2a$ távolságban levő R pontban kell összegyűjteni adott B indukciójú homogén mágneses térrel, amely merőleges a rajz síkjára. A pályák legyenek a középvonalra szimmetrikusak* (7.*ábra*). *Milyen legyen a mágneses tér határvonala?*



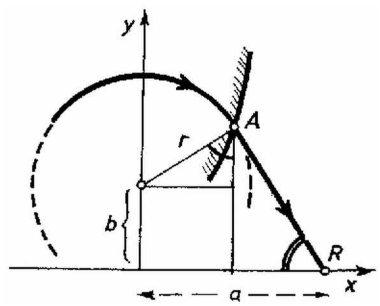
7. ábra

Megoldás. Homogén mágneses térben egy töltött rész körpályán mozog, közben a Q töltésre ható QvB Lorentz-erő szolgáltatja az mv^2/r centripetális erőt: $QvB = mv^2/r$, innen a körpálya sugara:

$$r = vm/QB.$$

A mi esetünkben a mágneses térben mindegyik ion ugyanakkora rádiuszú körpályán mozog. Pozitív ionok esetében hátulról előre irányuló mágneses térre van szükség. Amíg az ion a mágneses térben mozog, addig pályája az adott sugarú kör. Amint az ion kilép a térből, a kör utolsó pontjának érintője mentén repül tovább. A határvonalat úgy kell megválasztani, hogy valamennyi ion ugyanabba az R pontba repüljön. Ezt a matematikai problémát kell megoldani: hol kell a köröket abbahagyni, hogy az utolsó érintő eltalálja az R pontot. A szimmetria folytán elég az ábra egyik felével foglalkozni, továbbá a körök középpontjai az y-tengelyen vannak.

Az r sugarú körpályán repülő ion az x, y koordinátájú A pontban lép ki a térből és az érintő mentén repül R-be (8. ábra).



8. ábra

Hasonló háromszögekből:

$$\frac{y-b}{x} = \frac{a-x}{y}.$$

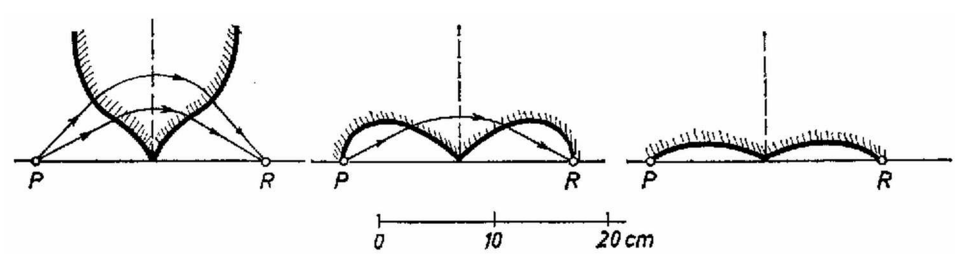
Azonkívül érvényes a kör egyenlete :

$$x^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

y, illetve $(y-b)$ kiküszöbölésével azonnal megkapjuk az ilyen tulajdonságú A-pontok mértani helyét, vagyis a mágneses tér határát megadó függvényt:

$$y = \frac{x\,(a-x)}{\sqrt{r^2-x^2}}.$$

Ez negyedfokú függvény. A függvénygörbének csak az első koordinátanegyedbe eső részére van szükségünk és ezt tükrözzük az y tengelyre. A térhatárolás három esetét mutatja a 9. ábra.



9. ábra

A határvonalak típusa aszerint alakul, hogy az a távolság és az r pályasugár hogyan viszonylanak egymáshoz. Ábránkon $a = 10$ cm és a rádiuszok rendre 7,5 cm, 10 cm és 20 cm. Ha $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg tömegű, $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ coulomb töltésű oxigénionokról és $B = 0{,}1$ tesla erősségű térről van szó, akkor a szükséges 420 km/s, 960 km/s és 1920 km/s repülési sebességek 2700 volt, 4800 volt és 19 200 volt gyorsító feszültségek hatására jönnek létre. Elvben mindegyik megrajzolt esetben a negyed-síkban kiinduló valamennyi ion összegyűjthető, de $r < a$ esetében ehhez a végtelenig terjedő térre volna szükség. A határoló görbe végtelenbe menő ága akkor csap le hirtelen az R pontba, amikor r egyenlő lesz a-val. Még tovább növekedő r-nél a tér határvonala lelaposodik.

Kísérleti feladat. Egy két kivezetéssel bíró félvezető karakterisztikáját kellett felvenni azzal a kikötéssel, hogy a félvezető csak 0,25 wattig terhelhető. Rendelkezésre álltak fix és változtatható ellenállások, két mérőműszer, valamennyi mérési területen megadott belső ellenállással és egy 9 voltos feszültségforrás. A mérés olyan természetű volt, hogy figyelembe kellett venni az ampermérőn létrejövő feszültségesést, illetve a voltmérő áramát. A karakterisztika elárulta, hogy a félvezető egy Zener-dióda volt.