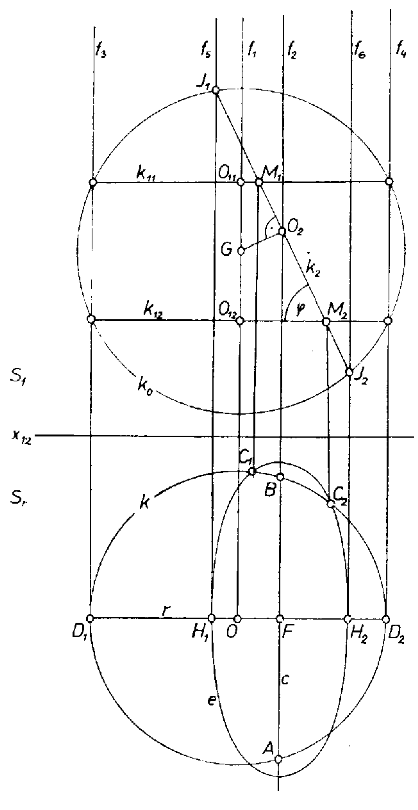
Az alábbiakban térbeli meggondolásokat használva oldjuk meg az 1352. gyakorlatot. A feladat: Szerkesszünk háromszöget, ha adott egy oldala, a másik két oldalának összege és a köréje írható kör sugara. – Erre a feladatra két (illetve három) megoldás ezen szám 114–117. oldalain olvasható.

Jelöljük a keresett ABC háromszögben az adott oldalt $AB = c$-vel, a másik két oldal adott összegét $BC + CA = a + b = s$-sel, a körülírt kör adott sugarát r-rel, és legyenek egy O középpontú, r sugarú k körben egy c hosszúságú húr végpontjai A és B. Ekkor C-t k-ból az az e ellipszis metszi ki, melynek fókuszai A, B, és nagytengelyének hossza s. (Az ellipszis létezik, mert a háromszög-egyenlőtlenség alapján $s > c$ szükséges feltétele a szerkeszthetőségnek.)

Olyan kölcsönös helyzetű kör és ellipszis közös pontjait keressük tehát, hogy az ellipszis kistengelye átmegy a kör középpontján, más szóval: a kistengely alakzatunknak szimmetriatengelye. (Körünknek további különlegessége, hogy átmegy az ellipszis fókuszain, ezt azonban nem fogjuk felhasználni, így eljárásunk enélkül is érvényes lesz.)

Tartsuk rajzunk S_r síkját vízszintesen, így k-t tekinthetjük bármely olyan r sugarú k_1 kör (függőleges vetítéssel nyert) vetületének, melynek síkja párhuzamos S_r-rel és O_1 középpontja az O-n átmenő f_1 függőleges egyenesen van. Ellipszisünket szintén tekinthetjük egy k_2 kör ugyanilyen vetítéssel nyert vetületének, ennek O_2 középpontja az e középpontján, az AB szakasz F felezőpontján átmenő f_2 függőlegesen van, S síkja ferdén hajlik S_r-hez és párhuzamos AB-vel. Ugyanis csak így esik az AB egyenesre k_2-ből annak az egyetlen átmérőnek a vetülete, amelyik nem rövidül az eredetihez képest, és így e nagytengelyét adja. Ebből adódik, hogy k_2 átmérőjének hossza s. A nagytengelyt adó átmérőre merőleges körátmérő viszont az e legrövidebb átmérőjét, H_1H_2 kistengelyét adja. (AH_1BH_2 rombusz, kerülete $2s$.)



Megoldásunk azon az észrevételen alapul, hogy az elmondottak lehetővé teszik k_1 és k_2 olyan megválasztását, hogy e két kör ugyanannak a gömbnek legyen egy-egy síkmetszete. Ekkor ugyanis – amennyiben vannak közös pontjaik –, ezek könnyen meghatározhatók és vetületük megadja a két kör vetületének, k-nak és e-nek közös pontjait. Az említett gömb G középpontja nyilvánvalóan csak f_1 és az O_2-ben S-re állított merőleges közös pontja lehet; és van is közös pontjuk, mert mindkettő benne van a H_1H_2-n átmenő S_f függőleges síkban, továbbá nem párhuzamosak. S_f a gömbből egy k_0 főkört metsz ki.

A k_1 és k_2 körök közös pontjainak meghatározásához elég tekintenünk S_f-en levő vetületüket. Köreink vetülete egy $2r$, illetve s hosszúságú szakasz, és mindkettő a k_0-nak húrja, az előbbi függőleges eltolással áll elő k-nak AB-re merőleges D_1D_2 átmérőjéből az f_3, f_4 függőlegesek mentén, k_2 vetületének végpontjai pedig hasonlóan a H_1-en, H_2-n átmenő f_5, f_6 függőlegesen vannak. E két húr közös pontja a k_1 és k_2 közös pontjának S_f-en levő vetülete.

Az S_f-en végzendő szerkesztést úgy kapcsoljuk hozzá S_r-beli kiindulási ábránkhoz, hogy S_f-et a H_1H_2 egyenesénél fogva eltoljuk AB irányában, majd ezen egyenes új, x_{12} helyzete körül belefordítjuk S_r-be. Ezáltal az egyelőre még „üres” f_1, f_2, …, f_6 egyenesek az O-n, F-en, …, H_2-n átmenő, AB irányú egyenesekként jelentkeznek, az S_f-beli és az S_r-beli képek úgy kapcsolódnak egymáshoz, mint egy Monge-féle képsíkrendszerbeli képpár a képsíkok egyesítése után. – Tartsuk számon, hogy segédgömbünknek S_r fölötti magassága felett még szabadon rendelkezünk.

Ezek után lépéseink a következők:

1. f_0-on megválasztjuk k_2 legalsó pontjának, J_2-nek helyzetét.
2. A J_2 körüli s sugarú körívvel f_5-ből kimetsszük k_2 legfelső pontját, J_1-et.
3. A J_1J_2 szakasz adja k_2 vetületét, és f_2-vel való metszéspontja az O_2 középpont.
4. Az O_2-ben J_1J_2-re állított merőlegesnek f_1-gyel való metszéspontja G, és a G körüli, GJ_1 sugarú kör a k_0 főkör.
5. Ekkor k_1 képeként k_0-ból az a két húr felel meg célunknak, amelyeknek egyik-egyik végpontja f_3-on, illetve f_4-en van; ezek a húrok metszik ki J_1J_2-ből k_1 és k_2 közös pontjainak M_1 és M_2 vetületét. (Lehetséges, hogy ilyen pont csak egy van, vagy egy sincs.)
6. Az most már nyilvánvaló, hogy az M-eken átmenő, f irányú egyenesek metszik ki k-ból a keresett háromszög C csúcsaként megfelelő pontokat. (Az ábrán a H_1H_2-re tükrös C-pároknak csak az egyik-egyik elemét rajzoltuk meg.)

Befejezésül két rövid megjegyzést. Könnyű látni, hogy feladatunknak annyi lényegesen különböző megoldása van, ahány végpontja esik a H_1H_2 kistengelynek a k kör belsejébe vagy a kerületére. (A diszkusszióra fent csak elindulásokat említettünk, ezt az igényes olvasóra hagyjuk.) [1] A H_1H_2 kistengelynek mint az $s/2$ oldalú AH_1BH_2 rombusz másik átlójának hossza $\sqrt{s^2-c^2}$; a kis- és a nagytengely aránya meghatározza az S_r, és S közti φ hajlásszöget:

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{s^2-c^2}}{s},$$

illetve még egyszerűbben:

$$\sin\varphi = \frac{c}{s}.$$

[1]Feladatunknak és számos hasonló feladatnak ilyenféle megoldása olvasható a következő Középiskolai Szakköri Füzetben: *Vigassy Lajos*: Síkmértani szerkesztések térmértani megoldással, Tankönyvkiadó, Budapest, 1957. (A 18-20. oldalon olvasható ennek a szerkesztésnek az előkészítése, előbb számítással, majd egyszerűbben a fenti úton.) *Szerk.*