

A topológia viszonylag fiatal ága a matematikának. Rendszeres művelése a századfordulón indult meg. Az úttörők, az alapokat lerakó tudósok között ott volt a magyar Riesz Frigyes is. A mai napig töretlen rohamos fejlődés azonban csak a 20-as évek elején vette kezdetét. Ekkor alakult ki két lelkes fiatal kutató, P. Sz. Urüszon és P. Sz. Alekszandrov tevékenysége nyomán a moszkvai topológiai iskola.

Urüszon, aki első tudományos dolgozatának megírásakor csak 17 éves és 23. évesen már a moszkvai egyetem docense, páratlanul gazdag életművet hagyott hátra 26 éves korában (1924-ben) bekövetkezett halálakor. Korszakalkotó felfedezései közül e helyen csak két témát ragadnánk ki.

Az egyik a topologikus terek metrizálhatóságának kérdése.

A téma tulajdonképpen a nem-euklideszi geometria megalkotására nyúlik vissza, arra a felfedezésre, hogy az euklideszi geometria nem az egyetlen elgondolható geometriai rendszer. A múlt században e felismerés nyomán sorra születtek meg az absztrakt térkonstrukciók, köztük olyanok is, amelyeket nem a valóságos tér leírásának az igénye, hanem más egyéb, főleg a fizikában fellépő szükségletek hoztak létre. Ezek az absztrakt konstrukciók több-kevesebb analógiát mutattak az euklideszi tér szerkezetével, ezért ezeket is tereknek hívják.

1906-ban Maurice Fréchet francia matematikus kezdeményezésére indult meg a sokfajta absztrakt tér folytonossági szerkezetét meghatározó közös mag felkutatása. Fréchet észrevette, hogy e terek mindegyikében valamilyen módon értelmezett a távolság, és ez a távolságfogalom néhány alapvető törvényszerűségnek mindenütt eleget tesz. Ilyen alapvető törvényszerűség például a háromszög-egyenlőtlenség, amely azt mondja ki, hogy három tetszőleges x , y és z pontnál az x és z pontok távolsága nem nagyobb, mint x és y távolságának és y és z távolságának az összege. A távolságra épített térfogalom az ún. metrikus tér korlátaiban azonban már Fréchet is felismerte, és a metrikus tértől általánosabb konstrukciót is megadott. Két évvel később Riesz Frigyes a IV. nemzetközi matematikai kongresszuson tartott előadásában olyan alapot – ti. a torlódási pont fogalmára – építette az általános térstruktúrát, amely már alkalmas volt nemcsak az összes szóba jövő absztrakt tér, hanem ezen túlmenően minden ún. sűrűsödési struktúra leírására. Végül 1914-ben Felix Hausdorff német matematikus részletesen kidolgozta a ponthalmazelméletét, és a tér folytonossági szerkezetének a leírását a környezetekre építette fel, megalkotva ezzel a topologikus tér fogalmát. A környezetek rendszere természetesen eleget tesz bizonyos általános szabályoknak. Ilyen szabály például az, hogy minden pontnak legyen legalább egy környezete, vagy hogy egy pont környezeteihez maga az illető pont is tartozzék hozzá, stb.

Minden metrikus tér meghatároz egy topologikus teret. Egy metrikus térben ugyanis azon y pontok összességét, amelyek egy rögzített, x ponttól egy ugyancsak rögzített pozitív ε -számnál közelebb vannak, x körüli ε sugarú gömbnek hívjuk. Ha a pontok környezeteinek az illető pontok körüli gömböket választjuk, úgy topologikus teret nyerünk.

Mármint Urüszon Fréchet-nek egy 1918-as cikkére utalva felveti a következő kérdést: Milyen topologikus terekben vezethető be távolságfogalom úgy, hogy az így nyert metrikus tér a megadott topologikus teret határozza meg? Itt valójában nem azt követeljük, hogy a gömbök a pontok topologikus térbeli környezeteivel legyenek azonosak, hanem csak annyit, hogy egy pont minden környezete tartalmazzon az illető pont körüli gömböt és minden az illető pont körüli gömb tartalmazzon a pontnak egy környezetét. Így pl. ha a sík pontjainál környezeteként azokat a négyzeteket választjuk, amelyeknek az illető pont a középpontja, akkor topologikus teret nyerünk. Ez a tér metrizálható, a természetes távolsággal ellátott sík mint metrikus tér éppen ezt a topologikus teret határozza meg. Az adott metrikus térben ugyanis a pont körüli „gömbök” a pont mint középpont körül vett nyílt (határvonalaktól megfosztott) körlemez lesznek és a sík minden x pontjára minden x középpontú négyzet tartalmaz x középpontú körlemez és minden x középpontú körlemez tartalmaz x középpontú négyzetet.

A topologikus terek metrizálhatóságának fent vázolt problémájára Urüszon kitűnően hasznosítható választ adott. Eredményei és az azok eléréséhez kialakított módszerek, különösképpen a róla elnevezett lemma használata nélkül megbénulna a mai topológia.

A dimenzióelmélet az a másik terület, ahol Urüszon új korszakot nyitott meg. Idevágó vizsgálatai időben korábbiak, mint a metrizálhatóság kérdésére vonatkozóak. Ő alapozta meg matematikailag szabatosan K. Menger osztrák matematikust megelőzve, a dimenzióról a köztudatban kialakult természetes képet, ti. azt, hogy durva megközelítéssel n -dimenziós az olyan alakzat, amelynek a határa $(n - 1)$ -dimenziós.

Az első topológiai tárgyú előadást nemcsak Moszkvában, hanem az egész Szovjetunió területén Urüszon hirdette meg az 1921/22-es tanévben „A kontinuumok topológiája” címmel. A moszkvai topológiai iskola azonban elsősorban mégis P. Sz. Alekszandrovnak, a kitűnő kutatónak, pedagógusnak és népszerűsítőnek a munkássága nyomán jött létre. Az első topológiai szemináriumot 1924 tavaszán még Urüszonnal együtt tervezik, de Urüszon halála miatt Alekszandrov, az egyetem fiatal docense ezt a kezdeményezést egyedül indítja el. A szeminárium első résztvevői közt ott van V. V. Nyemüickij, L. A. Tumarkin, A. N. Tyihonov, N. B. Vegyeniszov (1941-ben nyomtalanul eltűnt a Nagy Honvédő Háború frontján) és még sokan mások.

1925-ben Alekszandrov egy évre külföldi tanulmányútra indul. A szeminárium azonban nem oszlik fel, rendszeres levélváltás folyik Alekszandrovval, és a diákok megalakítják a moszkvai topológiai kört, ahol az érdekes felfedezések referálásán túl saját új tudományos eredményeikről is beszámolnak egymásnak. Ehhez a körhöz csatlakozik a topológiai szeminárium résztvevőin kívül A. N. Kolmogorov, L. A. Ljuszternyik, L. G. Snirelman és többen mások. Alekszandrov hazatérése után is fennmarad az egyre barátságosabb közösséggé váló topológiai kör. Vitáik színtere nemegyszer csónakkirándulás vagy sítúra.

Alekszandrov, aki szintén foglalkozott a metrizáció problémájával, és a dimenzió kérdéskörét ismételtelen új és új oldalról világította meg, 1925-ben megindította kombinatorikus-, algebrai topológiai kutatásait. Az általános felbontási

tétel felfedezésével (ezt most nem részletezzük) a szovjet topológia egyik legjelentősebb eredményéhez jutott el, az idegképzéssel pedig a mai algebrai topológia egyéb nélkülözhetetlen eszközét adta meg.

1926-ban jelentkezett a topológiai szemináriumban az akkor 18 éves L. Sz. Pontrjagin és ugyancsak algebrai topológiai tárgyú eredményeivel szokatlan éleslátásról tesz tanúságot. Pontrjagin megdöbbentően mély, a lényegét megvilágító felfedezéseivel nemcsak a topológiát, hanem a matematika több más ágát is teljesen új alapokra fektette. Nemsokára Alekszandrov mellett maga is egyik vezetője a moszkvai topológiai iskolának. Az ő tanítványai és munkatársai V. G. Boltjanszkij, M. M. Posztnyikov és sokan mások.

A topológiai szeminárium és a topológiai kör később híressé vált résztvevői közül többen maguk is iskolát alapítottak a Szovjetunió különböző egyetemi centrumaiban (V. A. Rohlin Leningrádban, G. Sz. Csogosvili Tbiliszi-ben, V. G. Boltjanszkij Taskentben), mások a matematika egyéb ágaiban honosították meg a topológiai módszereket. Rendkívüli élményt jelentett az én számomra is, amikor 1959-ben P. Sz. Alekszandrov meghívott a moszkvai topológiai kör és topológiai szeminárium ülésére, és ott kutatásaim eredményeiről beszámolhattam.

Térjünk most vissza a topologikus terek metrizációjának Urüsön által felvetett kérdésére. A 20-as évek közepétől kezdve negyed évszázadon keresztül új eredmény e területen nem született, 1950-ben azonban a moszkvai topológiai iskolához tartozó Ju. M. Szmirnov és J. Nagata japán matematikus egy időben, egymástól függetlenül igen jól használható szükséges és elégséges feltételt adtak tetszőleges topologikus tér metrizálhatóságára, és ezzel a témakör ismét fejlődésnek indult. Napjainkban is új és új eredmények születnek a világ különböző pontjain.

Végül egy olyan kutatási irányt említenék, amelynek erős hazai vonatkozásai vannak.

A metrikus terek és a topologikus terek között igen nagy a teljes általánosság irányába tett ugrás. Korán felvetődött az az igény, hogy ezt a nagy ugrást kisebb átmenetekre bontsák. Először Riesz Frigyes szerkesztett már említett kongresszus előadásában ilyen köztes struktúrát (vagyis a metrikus és topologikus tér között fekvő folytonossági struktúrát). Az alapfogalom Riesz-nél alakzat és alakzat szomszédos volta (ő maga kapcsoltságról beszél). Biztosan szomszédos két alakzat, ha van közös pontja, de szomszédosak lehetnek más alakzatok is. Így pl. a koordináta-rendszerrel ellátott sík

természetes szomszédossági struktúrájában az $y = \frac{1}{x}$ hiperbola és annak $y = 0$ aszimptotája szomszédos alakzatok.

Riesznek ezek a gondolatai hosszú ideig feledésbe merültek. A harmincas évek közepén azután egészen más jellegű köztes struktúrát fedezett fel A. Weil francia matematikus, és a Riesz-féle kapcsoltsági struktúrához igen közel állót V. A. Jefremovics moszkvai géométer. A Jefremovics-féle szomszédossági terek rendszeres tanulmányozása 1951-ben indult meg V. A. Jefremovics és Ju. M. Szmirnov kezdeményezése nyomán. P. Sz. Alekszandrov, egyebek között ezekről az izgalmas vizsgálatokról is beszámolt a Magyar Tudományos Akadémia Bolyai emlékülésén 1952-ben tartott előadásában. Ez az előadás újra felélesztette a folytonossági struktúrák iránti érdeklődést. Maga Riesz Frigyes is meglepetéssel vette tudomásul, milyen messzire fejlődtek a nála közel fél évszázaddal korábban felmerülő ideák, és Alekszandrov előadásának hatására vetette fel és oldotta meg Császár Ákos azt a kérdést, hogy melyek a sokfajta folytonossági struktúra közös alapjai és közös törvényszerűségei. A folytonossági struktúrák témaköre azóta is több kutatót foglalkoztat hazánkban, és az itt elért eredmények széles körű nemzetközi érdeklődést váltottak ki.

E cikk keretei nem tették lehetővé, hogy bármiféle teljességre törekedjünk. Igen sok olyan moszkvai matematikusnak, aki a topológiában elért eredményei alapján a nemzetközi élvonalhoz tartozik, még csak a nevét sem említettük, nemhogy kutatási területeiről szóltunk volna. Azok számára, akik a téma iránt részletesebben érdeklődnek, ajánlhatunk néhány könyvet, ill. cikket:

V. G. Boltjanszkij – V. A. Jefremovics: Szemléletes topológia. Tankönyvkiadó, Budapest, 1965.

P. Sz. Alekszandrov: A topológia egyszerű alapfogalmai. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1971.

P. Sz. Alekszandrov: A tér fogalmáról a topológiában. A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai Osztályának Közleményei, 3. kötet, 173-188. o., 1953.

II. C. AnexcaxApoB: H.C. YpMcox H ero MecTO s MaTeMaTwiecxoH xayce,

Előszó P. Sz. Urüsön összegyűjtött műveihez. 1. kötet, 11-420. o., 1951.

II.C. AnexcaxgpoB: H3 onbITa MocxoscxoH TononorHaecxoü uixonM, BeCTHHK AH. 10 (1954) 34-38.