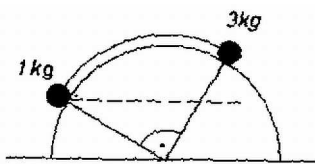


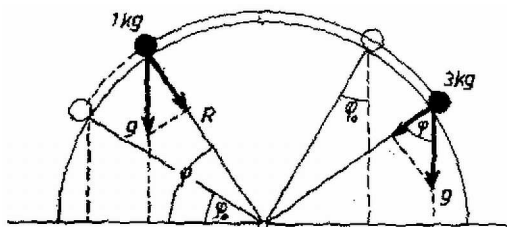
Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat október 21-én rendezte ez évi fizikai versenyét Budapesten és 7 vidéki városban az idén érettségizettek és középiskolai tanulók számára. A versenyzők 5 óráig dolgozhattak és bármilyen segédeszközt használhattak. A versenyzők létszáma 309 volt. Ismertetjük a feladatokat és megoldásukat.

**1.** Egy félhengerre olyan hosszú fonalat fektetünk, amelyhez tartozó középponti szög  $90^\circ$ -os (1. ábra). A felszínhez feszülő fonál egyik végén 1 kg-os, másik végén 3 kg-os tömeg van. A fonalat úgy helyezzük el, hogy az 1 kg-os tömeg a félhenger fele magasságában legyen. Ezután elengedjük a fonalat. Melyik tömeg repül le előbb, a hengerről? A súrlódást nem vesszük figyelembe.



1. ábra

**Megoldás.** Határozza meg a tömegek helyzetét  $\varphi$  szög (2. ábra).



2. ábra

Az indulási helyzetet meghatározó szög  $\varphi_0$ . Csak jobbra történő mozgással foglalkozunk. Legyen a két tömeg  $m$ , ill.  $3m$ .

A fonállal összekötött tömegek egyensúlya olyan  $\varphi_i$  szögnél valósul meg, amelyre a jobb oldali tömeg súlyának forgatónyomatéka egyenlő a bal oldali tömeg súlyának forgatónyomatékával.

$$R \sin \varphi_i \cdot 3mg = R \cos \varphi_i \cdot mg,$$

innen  $\tan \varphi_i = 1/3$ ,  $\varphi_i = 18,43^\circ$ . Tehát feladatunk  $\varphi_0 = 30^\circ$ -os adata mellett a tömegek elindulnak jobb felé.

Mozgás közben, egy bizonyos  $\varphi$ -hez tartozó helyzetben a tömegek közös sebessége  $v$ . Az energiatörvény szerint a jobb oldali tömeg munkavégzése egyenlő a bal oldali tömeg helyzeti energiájának növekedésével, hozzáadva az egész szerkezet mozgási energiáját:

$$3mgR(\cos \varphi_0 - \cos \varphi) = mgR(\sin \varphi - \sin \varphi_0) + \frac{4mv^2}{2}.$$

Innen kifejezzük  $\varphi$  függvényeként  $v$  sebességet, illetve  $v^2/R = a_c$  centripetális gyorsulást:

$$(I.) \quad a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{g}{2}[(3 \cos \varphi_0 + \sin \varphi_0) - (3 \cos \varphi + \sin \varphi)].$$

Ez a centripetális gyorsulás 0-tól  $g[(3 \cos \varphi_0 + \sin \varphi_0) - 1]/2$ -ig monoton növekszik, ha  $\varphi$ -t  $\varphi_0$ -tól  $90^\circ$ -ig változtatjuk.

A bal oldali  $m$  tömeget  $mg \sin \varphi$  erő szorítja a hengerhez. Az elrepülés feltétele, hogy  $ma_c$  centripetális erő elérje ezt az értéket, vagyis, a gyorsulásokkal kifejezve:

$$(II.) \quad a_c = \frac{v^2}{R} = g \sin \varphi_r.$$

A bal oldali tömeg elrepülésének  $\varphi_r$  szögét kiszámíthatjuk, ha (II.)-ben felhasználjuk  $a_c$  (I.)-szerinti értékét:

$$\sin \varphi_r = \frac{1}{2}[(3 \cos \varphi_0 + \sin \varphi_0) - (3 \cos \varphi_r + \sin \varphi_r)].$$

A  $\cos \varphi_r = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi_r}$  összefüggést felhasználva és rendezve:

$18 \sin^2 \varphi_r - 6(3 \cos \varphi_0 + \sin \varphi_0) \sin \varphi_r + (3 \cos \varphi_0 + \sin \varphi_0)^2 - 9 = 0$ . Ennek megoldása:

$$\sin \varphi_r = \frac{3 \cos \varphi_0 + \sin \varphi_0 + \sqrt{18 - (3 \cos \varphi_0 + \sin \varphi_0)^2}}{6}$$

A mi  $\varphi_0 = 30^\circ$ -os indításunk esetében  $\varphi_r = 87,85^\circ$ , tehát az ehhez tartozó helyzetben repülne le a bal oldali tömeg.

A jobb oldali tömegre vonatkozó számítást hasonlóan végezzük el. A tömeg  $3ma_c$  centripetális gyorsulásának a  $3mg$  súlyerő  $3mg \cos \varphi$  összetevőjét kell elérnie, ezért most az elrepülés feltétele:

$$(III.) \quad a_c = \frac{v^2}{R} = g \cos \varphi_r.$$

A jobb oldali  $3m$  tömeg elrepüléséhez tartozó  $\varphi_r$  szöget számíthatjuk, ha (III.)-ban felhasználjuk  $a_c$  (I.) szerinti értékét:

$$\cos \varphi_r = \frac{1}{2}[(3 \cos \varphi_0 + \sin \varphi_0) - (3 \cos \varphi_r + \sin \varphi_r)].$$

Ismét használjuk a  $\cos \varphi_r = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi_r}$  összefüggést és rendezzük az egyenletet:

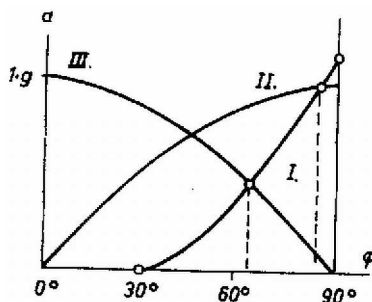
$$26 \sin^2 \varphi_r - 2(3 \cos \varphi_0 + \sin \varphi_0) \sin \varphi_r + (3 \cos \varphi_0 + \sin \varphi_0)^2 - 25 = 0.$$

Az egyenlet megoldása:

$$\sin \varphi_r = \frac{3 \cos \varphi_0 + \sin \varphi_0 + \sqrt{650 - 25(3 \cos \varphi_0 + \sin \varphi_0)^2}}{26}.$$

A mi esetünkben  $\varphi_0 = 30^\circ$  indítási szög mellett a jobb oldali tömeg elrepülési helyzetét meghatározó szög  $\varphi_r = 63,9^\circ$ . Tehát a jobb oldali tömeg előbb repül le a hengerről.

Jó áttekintést nyújt a 3. ábra.

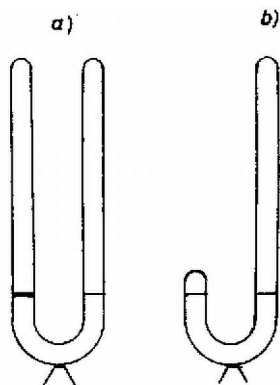


3. ábra

A II. görbe feltünteteti  $\varphi$  függvényében a bal oldali tömeget a hengerhez szorító erőnek megfelelő gyorsulást (sinus-görbe), a III. görbe pedig ugyanezt a jobb oldali tömegnél (cosinus-görbe). Az I. görbe a tömegek közös centripetális gyorsulását mutatja  $\varphi$  függvényében,  $\varphi_0 = 30^\circ$ -os indítás esetében. A metszéspontok jelentik a lerepülési helyzetet. Látjuk, hogy a jobb oldali tömegnek feltétlenül le kell repülnie valamilyen  $\varphi$  szögnél, mert az I.-görbe feltétlenül metszi a III.-cosinus-görbét. A II.-görbén nem kapunk feltétlenül metszéspontot. Meghatározható, hogy  $\varphi = 36,87^\circ$ -os indításnál éri el I. Az  $1g$  értéket, tehát ennél magasabb indításnál a bal oldali tömeg nem repülhet le.

Ha a mozgás elemzése nélkül csak a feladat feltett kérdésére akarunk válaszolni, akkor legegyszerűbben így járhatunk el. A tömegek sebessége és centripetális gyorsulása egyenlő. Ha a bal oldali tömeg a  $\varphi = 45^\circ$ -os helyzetig még nem repült le, akkor ezután a jobb oldali tömegnek kell előbb lerepülnie, mert ekkor már a sinus kisebb, mint a cosinus. Arról egyszerű számítással gyorsan meg lehet győződni, hogy a  $45^\circ$ -os helyzetig a bal oldali tömeg még nem repül le.

**2. a)** Hosszú szárú U-alakú csőben szobahőmérsékletű víz van (4. ábra).



#### 4. ábra

*A bal oldali szárban a víz felszínét párolgásmentes olajhártya zárja el. A berendezést súlypontja alatt megtámasztjuk, majd egyenletesen felmelegítjük. Felborul-e?*

**b)** *Mi történik melegítéskor az előzőleg kiegyensúlyozott berendezéssel akkor, ha nincs olajhártya, de a bal oldali szár sokkal rövidebb?*

**Megoldás.** a) A jobboldali csőben növekszik a folyadék felett a telített gőzök nyomása (a tenzió) és vizet nyom át a bal oldali szárba. Az ék fölötti keresztmetszetben anyag vándorolt bal felé, és ennek az ilyen alakú eszközben az a következménye, hogy a berendezés felső végével bal felé billen.

b) A melegítés után is egyenlők a tenziók, tehát a két szárban most is egyenlő magasan áll a víz (bár a mostani szint valamivel alacsonyabb, mint az előbbi, mert folyadéknak el kellett párolognia). A hosszabb jobb oldali szárba több gőznek kellett belepárolognia, mint a rövidebb baloldaliba, a jobb oldal nehezebb lett, aminek az a következménye (az egyenlő erőkarok mellett), hogy a szerkezet felső végével jobbra billen.

*Megjegyzések.* b) esetben a gőz viszonylag kis sűrűsége folytán nem túl nagy a keletkező súlykülönbség. Érdekes még, hogy gőzök nyomása és sűrűsége a felszíntől felfelé menve kissé csökken a magasságkülönbség folytán, amint az a légkörben ismeretes (hipszometriás nyomás- és sűrűségcsökkenés). Tehát a tér csak közvetlenül a felszín mellett telített, feljebb már nem. A kétoldali folyadékszintek magasságára nézve a felszín melletti nyomás a lényeges, és így a szintmagasságok egyenlők maradnak annak ellenére, hogy nagyobb tömegű gőz van a jobb oldali felszín felett. De ezek fent, belülről kisebb erővel nyomják a cső tetejét, mint a bal oldali rövidebb csőben.

Ha eredetileg levegő is lett volna a csövekben, vagy melegítéskor túllépnének a kritikus hőmérsékletet, az egyensúly-megbomlás előjele ugyanolyan marad.

**3.** *Felfújt, könnyű műanyag labdát találomra megpörgetve sima vízfelületre ejtünk. Azt tapasztaljuk, hogy mielőtt megáll, rendszerint függőleges tengely körül forog. Mi a jelenség magyarázata?*

**Megoldás.** A ferde helyzetű tengely körüli forgás vízszintes és függőleges tengely körüli forgás eredőjeként fogható fel. A vízszintes tengely körüli forgást a súrlódás erősen fékezi, mert a kerület, a gömb „egyenlítője” mentén nagy a sebesség. A függőleges tengely körüli forgással az érintkező felület kis sebessége jár együtt a gömb kis gömbsüvegénél, tehát ez a forgás lassabban fékeződik, tovább marad meg, a forgás végén már csak ez érvényesül.

**A verseny eredménye.** I. díjat nyert *Szabó Zoltán* honvéd (a budapesti Apáczai Csere Gimnáziumban érettségizett mint Turtóczky Sándor tanítványa); II. díjat nyert *Németh Tibor*, a budapesti Berzsenyi Gimnázium III. osztályában Hubert Györgyné tanítványa; egyenlő helyezésben III. díjat nyertek *Bezdek Károly*, a dunaújvárosi Műnichi Gimnázium IV. o. tanulója (tanára Kobzos Ferenc), *Tóth Péter*, a budapesti Eötvös Gimnázium IV. o. tanulója (tanára Veres Mihályné) és *Vassel Róbert*, a budapesti ELTE-TTK matematikus hallgatója (a budapesti I. István Gimnáziumban érettségizett mint Moór Ágnes tanítványa). Dicséretet kaptak könyvjutalommal *Nagy Péter* honvéd (a budapesti Petőfi Gimnáziumban érettségizett mint Biró István tanítványa), *Tarjányi László*, a kecskeméti Katona Gimnázium IV. o. t. (tanára Fodor István) és *Veress Tibor*, a budapesti Radnóti Gimnázium IV. o. t. (tanára, Kugler Sándorné).