

Gauss-féle binomális együtthatók*

II. rész

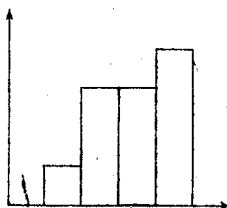
Megismertük *, a következő összefüggésekkel definiált Gauss-binomiális együtthatókat:

$$(1.1) \quad \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \frac{(q^n - 1)(q^{n-1} - 1) \cdots (q^{n-r+1} - 1)}{(q - 1)(q^2 - 1) \cdots (q^r - 1)} \quad 1 \leq r \leq n, \quad \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 1.$$

Írjuk n -et $n = r + s$ alakban. Beláttuk a 3. pontban, hogy ezek a kifejezések q -nak pozitív egész együtthatós polinomjai:

$$(3.2') \quad \begin{bmatrix} r+s \\ r \end{bmatrix} = A_{r+s,r,0} + A_{r+s,r,1}q + \dots + A_{r+s,r,rs}q^{rs}.$$

A 4. pont tétele az ott értelmezett zegzugos utakkal való következő összefüggést mondta ki: $A_{r+s,r,\alpha}(0, 0)$ pontból az (r, s) pontba vezető zegzugos utak közül azoknak a száma, amelyek alatti terület α .



Az 5. pontban a zezugos utat r darab, egymás mellé helyezett egységnyi alapú téglalapból építettük fel. Ezek alapja vízszintes, magasságuk nem-negatív és s -nél nem nagyobb egész szám; a 0 magasság is előfordulhat. Az alapok a pozitív x tengely mentén sorakoznak a kezdőponttól kezdve, a magasságok nem csökkenő sorozatot alkotnak, és a területek összege (vagy ami ugyanaz, a magasságoké) α , a zezugos út alatti terület.

6. *Egy újabb megközelítési mód.* Azoknak a zezugos utaknak a száma, amelyek alatti terület α , megegyezik tehát α -nak r darab nem-negatív egész összeadandóként való előállításai számával. Jelöljük most ezt az előállításszámot $A_{r+s, r, \alpha}$ -val, elfelejtve egyelőre ennek a jelnek korábbi, fent is használt jelentését.

Egy szám előállítását bizonyos típusú összeadandókból a szám egy particiójának nevezzük. Ezek elméletének alapjait *Euler* fektette le. ⁶ Itt az összeadandók nem csökkenő sorrendben következnek, tehát egy előállítás meg van határozva azzal, ha tudjuk, hogy melyik számok szerepelnek összeadandóként és melyik hányszor. Ha tehát pl. a 3 kétszer szerepel egy összegben, azt a 6, 2 számpárral jelölhetjük: a második mutatja, hogy az első szám hány összeadandó összegének tekintendő a particióban.

Ilyen módon, ha egy particióban a $0, 1, 2, \dots, s$ összeadandók szerepelhetnek csak, akkor ezek mindegyikéhez számpárok egy-egy végtelen sorozatát kell hozzárendelnünk. A párok elemeit egymás alá írva a $0, 1, 2, \dots, s$ -hez sorra a következő sorozatok tartoznak:

$$\begin{array}{cccccc}
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\
0 & 1 & 2 & & n & \\
0 & 1 & 2 & \dots & n & \dots \\
0 & 1 & 2 & & n & \\
0 & 2 & 4 & \dots & 2n & \dots \\
0 & 1 & 2 & & n & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots \\
0 & s & 2s & \dots & ns & \dots \\
0 & 1 & 2 & & n &
\end{array}$$

Mindegyik sorozatból ki kell vennünk egy-egy párt (ha valamelyik összeadandó nem szerepel egy particióban, akkor a sorozat elején álló $(0, 0)$ párt), a megfelelő elemeket összeadni, és ahányféleképpen létrejön ilyen módon az (α, r) pár, ez a szám adja meg az α szám r -tagú particióinak a számát, ha a tagok s -nél nem nagyobb, nem-negatív egész számok lehetnek, és sorrendjük elő van írva (nem csökkenő).

*Megjelent az *Elemente der Mathematik* 26 (1971), 102–109. oldalán. Fordította a K. M. L. céljára módosításokkal *Surányi János*.

***Pólya György*: Gauss-féle binomiális együtthatók, I. rész, K. M. L. 45 (1972), 97–102. old.

⁶ *Leonhard Euler*: Introductio in Analysin Infinitorum (Lausanne 1784) 1. köt., 253–275. old., vagy: Összegyűjtött művei 1. sorozat 8. köt., 313–338. A szükséges előzmények megtalálhatók *Surányi J.*: Polinomok és végtelen polinomok II. rész c. cikkében. K. M. L. 45 (1972), 193–208. old.

Ezeket a pár-sorozatokot két változó, mondjuk q és x végtelen polinomjaival helyettesíthetjük. Az első elemek sorozatát írjuk q kitevőiként, a másodikat x kitevőjéül. A polinomok tehát

$$\begin{array}{l} 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots \\ 1 + qx + q^2x^2 + \dots + q^nx^n + \dots \\ 1 + q^2x + q^4x^2 + \dots + q^{2n}x^n + \dots \\ \vdots \\ 1 + q^sx + q^{2s}x^2 + \dots + q^{sn}x^n + \dots \end{array}$$

(Az első sorozatban q mindenütt a 0-dik hatványon szerepel.) Ha ezeket összeszorozzuk, akkor minden polinomból kell venni egy-egy tagot, összeszorozni, és ezek összege adja a szorzatpolinomot. Egy ilyen tag képzésénél viszont külön összeadjuk a q -hatványok kitevőit, külön az x -hatványok kitevőit. Ez megegyezik az előbb a párok összeadásáról mondottakkal. Így a szorzatban $q^\alpha x^r$ együtthatója $A_{r+s, r, \alpha}$ lesz.

Másrészt az első polinom $1/(1-x)$ -nek polinom-alakja, a többi pedig ebből x helyett qx -et, q^2x -et, $\dots$, $q^s x$ -et téve adódik. Így, bevezetve a következő jelölést:

$$(6.1) \quad (1-x)(1-qx)(1-q^2x)\dots(1-q^sx) = g(x),$$

azt nyertük, hogy

$$(6.2) \quad \begin{aligned} & 1 + (A_{r+s,1,0} + A_{r+s,1,1}q + \dots + A_{r+s,1,s}q^s)x + \\ & + (A_{r+s,2,0} + A_{r+s,2,1}q + \dots + A_{r+s,2,2s}q^{2s})x^2 + \\ & + \dots + (A_{r+s,n,0} + \dots + A_{r+s,n,n}q^{ns})x^n + \dots = \frac{1}{q(x)}. \end{aligned}$$

Jelöljük itt x^r együtthatóját P_r -rel, vagyis

$$(6.3) \quad \begin{aligned} P_0 &= 1, \\ A_{r+s,r,0} + A_{r+s,r,1}q + \dots + A_{r+s,r,rs}q^{rs} &= P_r, \quad \text{ha } r \geq 1. \end{aligned}$$

Ekkor (6.2) így írható:

$$(6.4) \quad \frac{1}{q(x)} = P_0 + P_1x + \dots + P_rx' + \dots$$

A P_r együttthatók előállítására a célunk. Ehhez felhasználhatjuk a (6.1)-ből közvetlenül adódó következő azonosságot:

$$(6.5) \quad \frac{1-x}{q(x)} = \frac{1-q^{s+1}x}{q(qx)}$$

(vesd össze (2.4)-gyel. I. rész, 98. old.) és figyelembe véve (6.4)-et

$$(6.6) \quad \begin{aligned} (1-x)(1+P_1x+\dots+P_rx^r+\dots) &= \\ &= (1-q^{s+1}x)(P_0+P_1qx+\dots+P_rq^rx^r+\dots). \end{aligned}$$

Az egyenlő x -hatványok együtthatóit egybevetve innen adódik, hogy

$$(6.7) \quad P_r - P_{r-1} = q^r P_r - q^{r+s} P_{r-1}$$

vagy

$$(6.8) \quad P_r = \frac{q^{r+s} - 1}{q^r - 1} P_{r-1}, \quad \text{for } r = 1, 2, 3, \dots$$

Alkalmazzuk ismételten (6.8)-at r csökkenő értékeire, ekkor az (1.1) definíció és (6.3) alapján azt nyerjük, hogy

$$(6.9) \quad P_r = \begin{bmatrix} r+s \\ r \end{bmatrix} = A_{r+s,r,0} + A_{r+s,r,1}q + \dots + A_{r+s,r,rs}q^{rs},$$

ahol most $A_{r+s,r,\alpha}$ a szóban forgó partició-probléma megoldásainak a számát jelenti, s így a bevezetőben említettek szerint azoknak a zegzugos utaknak a számát is, amelyek alatt α nagyságú terület van. Ezzel újabb bizonyítást is kaptunk a 4. pont tételére.

Ellenőrzésül jegyezzük meg, hogy ha q tart 1-hez, (6.4) a következőbe megy át: ⁷

$$(6.4^*) \quad \frac{1}{(1-x)^{s+1}} = 1 + \binom{s+1}{1}x + \binom{s+2}{2}x^2 + \dots + \binom{s+r}{r}x^r + \dots$$

P_r kiszámítása ebben a pontban rendkívül hasonlít Q_r kiszámításához a 2. pontban. Most azonban $A_{n,r,\alpha}$ egy kombinatorikus értelmezéséből indultunk ki és ebből jutottunk el a formulához, míg a 4. pontban $A_{n,r,\alpha}$ -t mint a (3.2), [ill. (3.2')] formulában fellépő együtthatót definiáltuk és utólag igazoltuk a kombinatorikus értelmét.

7. *Rövid kitekintés „Gauss-féle polinomiális együtthatókra”.* ⁸ Legyen n nem-negatív egész szám és definiáljuk a „Gauss-féle faktoriálst” mint q következő polinomját:

$$(7.1) \quad \begin{aligned} n!! &= \frac{(q-1)(q^2-1) \cdot \dots \cdot (q^n-1)}{(q-1)^n} = \\ &= 1 \cdot (1+q)(1+q+q^2) \cdot \dots \cdot (1+q+\dots+q^{n-1}) = \\ &= B_{n,0} + B_{n,1}q + \dots + B_{n,n(n-1)/2}q^{n(n-1)/2}. \end{aligned}$$

Ennek $B_{n,i}$ együtthatói nem-negatív egész számok, foka $n(n-1)/2$. Definiálhatjuk $n!!$ -t a

$$(7.2) \quad 0!! = 1$$

kezdeti feltétellel és a következő rekurzív formulával is:

$$(7.3) \quad (n+1)!! = (1+q+\dots+q^n)n!!$$

Tekintsünk egy n betűből álló ABC -t és az ebben n különböző betűvel leírható „szavakat”. Ezek száma nyilvánvalóan $n!$. Minden ilyen szóban $n(n-1)/2$ betűpár lép fel; akkor mondjuk, hogy egy ilyen pár inverziót alkot, ha az ABC -sorrendben előbbi betű a szóban hátrább áll. Ekkor $B_{n,i}$ az $n!$ szó (permutáció) közül azoknak a száma, amelyekben az inverziók száma ⁹ i .

Ez könnyen látható teljes indukcióval a (7.3) rekurziós formula alapján. Vegyünk hozzá a szót alkotó n betűhöz egy új betűt, és ez előzze meg mindegyiket az ABC -sorrendben. Aszerint, hogy az új betű az első, második, harmadik, ..., vagy végül az utolsó helyen áll, az inverziók száma 0-val, 1-gyel, 2-vel, n -nel nő. Pontosan ennek felel meg az, hogy (7.3)-ban az első tényező első, második, harmadik, ..., utolsó tagjával szorozva, q kitevője 0-val, 1-gyel, 2-vel, ..., n -nel nő.

Akár a (7.1) definiáló formulából, akár a kombinatorikus jelentésből következik, hogy

$$(7.4) \quad B_{n,i} = B_{n,n(n-1)/2-i}, \quad i = 0, 1, \dots, n(n-1)/2$$

$$(7.5) \quad B_{n,0} + B_{n,1} + \dots + B_{n,n(n-1)/2} = n!.$$

A Gauss-binomiális együtthatókat írhatjuk ilyen alakban:

$$(7.6) \quad \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \frac{n!!}{r!!(n-r)!!}.$$

Ekkor a többtagúak hatványaiban fellépő polinomiális együtthatók egy Gauss-féle analogonja (háromtagúak esetére)

$$(7.7) \quad \frac{n!!}{r!!s!!t!!},$$

ahol $r+s+t=n$ és n, r, s, t nem-negatív egészek; megmutatható, hogy (7.7) is pozitív egész együtthatós polinomja q -nak, fokszáma $rs+rt+st$. Az együtthatóknak itt is lehet kombinatorikus jelentést tulajdonítani: olyan n -betűből álló sorozatok számát adják meg, amelyek minden betűje x, y , vagy z és amelyekben bizonyos inverziók száma adott érték. Minden ilyen betűsorozat tekinthető a háromdimenziós rácsban egy-egy zezugos út képviselőjének is. Az inverziószám

⁷ Lásd pl. *Surányi János*: Polinomok és végtelen polinomok I. rész, K. M. L. 45 (1972), 115. old.

⁸ Kettőnél több tagúak hatványainak tagokra bontott alakját megadhatjuk a következő gondolatmenet alapján: $(x+y+z)^5$ -ben pl. x^2yz^2 alakú tagot úgy kapunk, hogy a hatványt kiírva 5 tényező szorzataként, két tényezéből az x -et, egyből az y -t, kettőből a z -t választjuk ki. Egy ilyen kiválasztást aláhúzással jelölhetünk ki:

$$(\underline{x} + y + z)(x + \underline{y} + z)(x + y + \underline{z})(x + \underline{y} + z)(\underline{x} + y + z).$$

Az aláhúzott tagok a tényezők sorrendjében véve az $xyzzyx$ betűk egy permutációját (esetünkben az $xzzyyx$ permutációt) adják. Az x^2yz^2 tag együtthatója $(x+y+z)^5$ tagokra bontott alakjában eszerint ezeknek a permutációknak a száma lesz: $5!/(2!1!2!) = 30$.

Hasonlóan $(x+y+z)^n$ -ben $x^r y^s z^t$ együtthatója, ha $r+s+t=n$, ez lesz: $n!/(r!s!t!)$, és általában $(x_1+x_2+\dots+x_k)^n$ -ben, ha $t_1+t_2+\dots+t_k=n$, az

$$x_1^{t_1} x_2^{t_2} \dots x_k^{t_k}$$

tag a következő együtthatóval szerepel: $n!/(t_1!t_2!\dots t_k!)$. Ezeket a számokat nevezzük polinomiális együtthatóknak.

⁹ Lásd pl, a ⁴ alatt idézett mű 479: oldalát vagy *E. Netto*: Lehrbuch der Kombinatorik, 2. kiad. (Leipzig, 1927.) 94–97. old.

három terület összegével egyezik meg: a zezugos útnak a koordinátasíkokon való vetületei alatti területek összegével, de az „alatt” értelmezésével óvatosnak kell lenni.

A még több tagúak hatványaiban fellépő együtthatók Gauss-féle megfelelői hasonlóan értelmezhetők. Ezek is q polinomjai, és a bennük fellépő együtthatók is bizonyos betűsorozatok inverziószámaival vannak kapcsolatban; területekkel kapcsolatos értelmezésük is lehetséges, de nehézkessé válik a dimenziószám növekedésével.