

A III. osztályos gimnáziumi fizikakönyv megemlíti (a 116. lapon), hogy Kepler három bolygótörvényéből a Newton-féle gravitációs törvény levezethető.

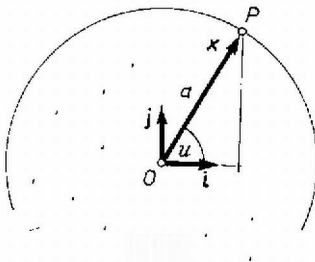
Ebben a cikkben megmutatjuk, miképpen látható be a középiskolai matematika eszközeinek segítségével, hogy a bolygókra a Naptól mért távolság négyzetével fordítottan arányos erő hat.

**A Kepler-mozgás származtatása körmozgásból.** Vegyünk fel a síkban két merőleges egységvektort,  $\mathbf{i}$ -t és  $\mathbf{j}$ -t. (Ha  $\mathbf{i}$ -t pozitív irányban  $\frac{\pi}{2}$  szöggel elforgatjuk, az így kapott vektor legyen egyenlő  $\mathbf{j}$ -vel. A szöveget radiánokban mérjük.)

Az

$$(1) \quad \mathbf{x} = a[(\cos u)\mathbf{i} + (\sin u)\mathbf{j}]$$

vektor  $P$  végpontja – ha  $u$  tetszés szerint változhat,  $a$  pedig állandó – körpályán mozog, melynek sugara  $a$  (1. ábra).

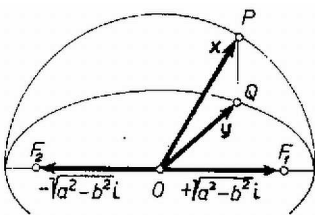


1. ábra

Származtassunk e körből ellipszist összenyomással, szakszerűbben szólva  $b/a$  arányú merőleges affinitással ( $0 < b/a \leq 1$ ); az affinitás tengelye legyen a kör  $\mathbf{i}$  irányvektorú átmérője. A  $P$  pont képe az

$$(2) \quad \mathbf{y} = a(\cos u)\mathbf{i} + b(\sin u)\mathbf{j}$$

helyvektorú  $Q$  pont (2. ábra).



2. ábra

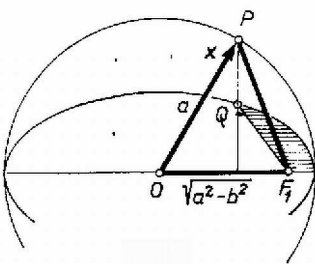
Míg  $P$  az  $a$  sugarú kört futja be,  $Q$  ellipszispályán halad végig. Ezen ellipszis fél nagytengelye  $a$ , fél kistengelye  $b$ ; az  $a$  sugarú kör az ellipszis főköre.

Megmutatható, hogy a  $Q$  pontnak a  $\sqrt{a^2 - b^2}\mathbf{i}$  helyvektorú  $F_1$ , és a  $-\sqrt{a^2 - b^2}\mathbf{i}$  helyvektorú  $F_2$  pontoktól mért távolság-összege állandó s egyenlő  $2a$ -val;  $F_1$  és  $F_2$  az ellipszis gyújtópontjai vagy fókuszai.

$Q$  tehát ellipszispályán kering, mint a bolygók Kepler 1. törvénye szerint. E törvény kimondja még, hogy a Nap a pálya egyik gyújtópontjában van.

**Kepler időegyenlete.** A következőkben összefüggést vezetünk le az  $u$  szög s a  $t$  idő között Kepler 2. törvénye alapján. Ez megállapítja, hogy a Napot (az egyik fókuszot) a bolygóval összekötő vezérsugár által  $t$  idő alatt sűrt terület egyenesen arányos  $t$ -vel.

Vizsgáljuk először a körmozgást végző  $P$  pontot. Növekedjék a  $t$  idő alatt az  $\mathbf{x}$  vektor irányszöge zérusról az  $u$  értékre;  $\mathbf{x}$  eközben  $\frac{1}{2}a^2u$  területű köríket sűrol. Mekkora az a terület, amelyen ez idő alatt az ellipszis jobb oldali  $F_1$  gyújtópontjából  $P$ -hez vont  $F_1P$  egyenes szakasz seper végig? (Lásd a 3. ábrát.)



### 3. ábra

Ezt úgy kapjuk meg, hogy a körcikk  $\frac{1}{2}a^2u$  területéből levonjuk az  $OF_1P$  háromszög területét. Az előző szakaszban láttuk:  $F_1$  távolsága az  $O$  középponttól  $\sqrt{a^2 - b^2}$ ; ez a háromszög alapja. Magassága  $a \sin u$ ; a levonandó terület tehát  $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 - b^2}a \sin u$ . Az  $F_1P$  egyenes szakasz eszerint  $t$  idő alatt  $\frac{1}{2}a^2(u - \varepsilon \sin u)$  területet sűrol, ahol  $\varepsilon = \sqrt{a^2 - b^2}/a$ .

Az a terület, melyet az  $F_1$  fókuszról az ellipszispályán haladó  $Q$ -hoz húzott  $F_1Q$  egyenes szakasz sűrol a  $t$  idő alatt (a 3. ábrán vonalkázva), az előbb említett területből  $b/a$  arányú összenyomással kapható. Számértéke az előbbiének  $b/a$ -szorosa:

$$(3) \quad \frac{1}{2}ab(u - \varepsilon \sin u).$$

(Egy  $A$  területű síkidomból  $\lambda$  arányú összenyomással kapott síkidom területe  $\lambda A$ . Ezt könnyen beláthatjuk pl. háromszög esetében, de igaz bármilyen síkidomra.)

Annak feltétele, hogy az  $F_1$  gyújtópontból  $Q$ -hoz vont  $F_1Q$  „vezérsugar” által  $t$  idő alatt sűrolt terület  $t$ -vel arányos legyen:

$$(4) \quad u - \varepsilon \sin u = \omega t,$$

ahol  $\omega = 2\pi/T$  állandó;  $T$  az az idő, mely alatt  $u$  zérusról  $2\pi$ -re nő (keringési idő). Ez az összefüggés biztosítja, hogy  $Q$  ellipszispályáján a 2. Kepler-törvénynek megfelelően kering; (4) neve: Kepler időegyenlete.

**A sebesség.** Határozzuk meg a Kepler-mozgást végző  $Q$  pont sebességét. Az  $u$  szögnek megfelelő  $t$  időt részletebben  $t(u)$ -val jelöljük,  $\mathbf{y}$  helyett is  $\mathbf{y}(u)$ -t írunk. Ha  $u$ -t megnöveljük  $\Delta u$ -val, az  $\mathbf{y}$  vektor  $\mathbf{y}(u + \Delta u) = y(u) + \Delta \mathbf{y}$ -ra,  $t(u)$  pedig  $t(u + \Delta u) = t(u) + \Delta t$ -re változik. A  $\Delta \mathbf{y}/\Delta t$  átlagsebesség-vektort így írjuk fel:

$$(5) \quad \frac{\Delta \mathbf{y}}{\Delta t} = \frac{\Delta u}{\Delta t} \frac{\Delta \mathbf{y}}{\Delta u}.$$

Az  $\mathbf{y}$  vektort (2) mint  $u$  függvényét adja meg,  $u$  és  $t$  között (4) ad kapcsolatot. Ezen összefüggések alapján (5) jobb oldalának két tényezőjét így írhatjuk:

$$(6) \quad \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{\omega}{1 - \varepsilon \frac{\Delta \sin u}{\Delta u}}, \quad \frac{\Delta \mathbf{y}}{\Delta u} = a \frac{\Delta \cos u}{\Delta u} \mathbf{i} + b \frac{\Delta \sin u}{\Delta u} \mathbf{j};$$

itt  $\Delta \cos u = \cos(u + \Delta u) - \cos u$ ,  $\Delta \sin u = \sin(u + \Delta u) - \sin u$ . Ezeket a kifejezéseket helyettesítsük be (5)-be.

A sebességet a  $t$  pillanatban az átlagsebesség határértéke adja meg:

$$(7) \quad \mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{y}}{\Delta t}.$$

A harmonikus rezgőmozgás sebességének és gyorsulásának meghatározásakor megtanultuk, mi a határértéke  $\cos u$  és  $\sin u$  differenciahányadosának:

$$(8) \quad \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta \cos u}{\Delta u} = -\sin u, \quad \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta \sin u}{\Delta u} = \cos u.$$

Az (5), (6), (7), (8) egyenleteket felhasználva kapjuk:

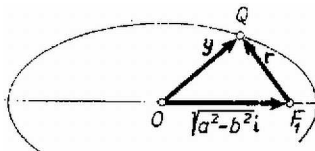
$$(9) \quad \mathbf{v} = \frac{\omega}{1 - \varepsilon \cos u} [-a(\sin u) \mathbf{i} + b(\cos u) \mathbf{j}].$$

**A gyorsulás.** A következőkben a Kepler-mozgást végző  $Q$  pont gyorsulását határozzuk meg.

Előkészítésképpen bevezetjük az

$$(10) \quad \mathbf{r} = \mathbf{y} - \sqrt{a^2 - b^2} \mathbf{i}$$

vektort, mely az  $F_1$  fókusz  $Q$ -val (a Napot a bolygóval) köti össze (4. ábra).



4. ábra

A (2) kifejezés és a  $\sqrt{a^2 - b^2} = \varepsilon a$  egyenlőség felhasználásával  $\mathbf{r}$ -et így írhatjuk:

$$(11) \quad \mathbf{r} = a(\cos u - \varepsilon)\mathbf{i} + b(\sin u)\mathbf{j}.$$

Számítsuk ki ezen vektor  $\mathbf{r}$  hosszát. Képezve az egymásra merőleges összetevők hosszának négyzetösszegét, Pitagorasz tétele értelmében kapjuk:

$$(12) \quad r = \sqrt{a^2(\cos u - \varepsilon)^2 + (b \sin u)^2} = \sqrt{a^2(\varepsilon^2 \cos^2 u - 2\varepsilon \cos u + 1)} = a(1 - \varepsilon \cos u);$$

itt a  $\cos^2 u + \sin^2 u = 1$  azonosság segítségével  $\sin^2 u$ -t  $\cos^2 u$ -val fejeztük ki, majd felhasználtuk a  $\sqrt{a^2 - b^2} = \varepsilon a$  egyenlőséget, végül a négyzetgyökvonás elvégzésekor figyelembe vettük, hogy  $\varepsilon \cos u$  sohasem nagyobb 1-nél.

Rátérünk a gyorsulás kiszámítására. Mialatt a  $t$  idő  $t + \Delta t$ -re növekszik, az  $u$  szög  $\Delta u$ -val nő;  $\mathbf{v}$  megváltozását a  $\Delta t$  időtartam folyamán jelöljük  $\Delta \mathbf{v}$ -vel. A  $\mathbf{v}$  sebesség (9) kifejezésének felhasználásával  $\Delta \mathbf{v}/\Delta t$  átlaggyorsulást így írhatjuk fel:

$$(13) \quad \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\omega}{\Delta t} \left\{ -a \left[ \frac{\sin(u + \Delta u)}{1 - \varepsilon \cos(u + \Delta u)} - \frac{\sin u}{1 - \varepsilon \cos u} \right] \mathbf{i} + b \left[ \frac{\cos(u + \Delta u)}{1 - \varepsilon \cos(u + \Delta u)} - \frac{\cos u}{1 - \varepsilon \cos u} \right] \mathbf{j} \right\}.$$

Hozzuk közös nevezőre a szögletes zárójelben álló hányadosfüggvényeket. A közös nevező  $[1 - \varepsilon \cos(u + \Delta u)](1 - \varepsilon \cos u)$ . Az  $\mathbf{i}$  előtt szorozóként álló szögletes zárójel számlálója

$$(14) \quad \sin(u + \Delta u) - \sin u - \varepsilon [\sin(u + \Delta u) \cos u - \sin u \cos(u + \Delta u)],$$

a  $\mathbf{j}$  előtt álló

$$(15) \quad \cos(u + \Delta u) - \cos u.$$

A  $\Delta \sin u = \sin(u + \Delta u) - \sin u$ ,  $\Delta \cos u = \cos(u + \Delta u) - \cos u$  rövidítésekkel (14) a

$$(16) \quad \Delta \sin u - \varepsilon(\cos u \Delta \sin u - \sin u - \Delta \cos u),$$

(15) a

$$(17) \quad \Delta \cos u$$

alakban írható fel. Célszerű ezen kívül (13) jobb oldalát  $\Delta u$ -val megszorozni és elosztani. A  $\Delta \mathbf{v}/\Delta t$  átlaggyorsulás számára ezen átalakítások elvégzése után a következő kifejezést kapjuk:

$$(18) \quad \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta u}{\Delta t} \frac{\omega}{[1 - \varepsilon \cos(u + \Delta u)](1 - \varepsilon \cos u)} \left\{ +a \left[ (1 - \varepsilon \cos u) \frac{\Delta \sin u}{\Delta u} + \varepsilon \sin u \frac{\Delta \cos u}{\Delta u} \right] \mathbf{i} + b \frac{\Delta \cos u}{\Delta u} \mathbf{j} \right\}.$$

A gyorsulást a  $t$  pillanatban az átlaggyorsulás határértéke adja meg. A  $\Delta u/\Delta t$  differenciahányados (6) alatt felírtuk, a  $\sin u$  és a  $\cos u$  függvény differenciahányadosának határértékét ismerjük [lásd a (8) képletet]. A nevezőben álló  $[1 - \varepsilon \cos(u + \Delta u)]$  határértéke  $(1 - \varepsilon \cos u)$ . A pillanatnyi gyorsulás

$$(19) \quad \mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$

vektora számára így az

$$(20) \quad \mathbf{a} = \frac{\omega^2}{(1 - \varepsilon \cos u)^3} [a(\cos u - \varepsilon)\mathbf{i} + b(\sin u)\mathbf{j}]$$

kifejezést kapjuk (az utolsó lépésben még egyszer figyelembe vettük a  $\cos^2 u + \sin^2 u = 1$  azonosságot).

A (20) egyenlet jobb oldalán a szögletes zárójelben (11) szerint az  $\mathbf{r}$  vektor áll, mely  $F_1$ -et  $Q$ -val (a Napot a bolygóval) köti össze. A nevezőben  $1 - \varepsilon \cos u$  pedig (12) értelmében  $r/a$ -val egyenlő, ahol  $r$  az  $\mathbf{r}$  vektornak a hossza. Célszerű lesz bevezetni az  $\mathbf{r}^\circ = (1/r)\mathbf{r}$  jelölést ( $\mathbf{r}^\circ$  egységvektor, mely az  $F_1$  gyújtópontból  $Q$  felé mutat). Mindezt felhasználva, az  $\mathbf{a}$  gyorsulásvektor számára kapott (20) kifejezés, ha mind a két oldalát megszorozzuk a bolygó  $m$  tömegével, a következő alakban írható fel:

$$(21) \quad m\mathbf{a} = -m\omega^2 a^3 \frac{\mathbf{r}^\circ}{r^2}.$$

Newton második mozgástörvénye értelmében a tömeg és a gyorsulás  $m\mathbf{a}$  szorzata egyenlő az erővel. Látjuk: a bolygóra a Naptól mért  $r$  távolság négyzetével fordítottan arányos erő hat, Newton gravitációs törvényének megfelelően. Ezen erő irányát  $\mathbf{a} - \mathbf{r}^\circ$  egységvektor határozza meg: az erővektor a bolygótól a Nap felé mutat.

Kepler (4) időegyenletével kapcsolatosan megállapítottuk, hogy  $\omega = 2\pi/T$ , ahol  $T$  a keringési idő. Így tehát  $\omega^2 a^3 = (2\pi)^2 (a^3/T^2)$ . A 3. Kepler-törvény kimondja: az  $a$  fél nagytengely köbének s a  $T$  keringési idő négyzetének hányadosa a Naprendszer minden bolygójára ugyanaz az érték. (Egyébként más úton meg lehet mutatni, hogy  $\omega^2 a^3 = fM$ , ahol  $M$  a Nap tömege,  $f$  pedig a bolygó s a Nap tömegétől független állandó.)

*Megjegyzés.* A fentiekben elkerültük a hivatkozást a különféle (pl. a hánvadosfüggvényre, közvetett függvényre érvényes) deriválási szabályokra. Ezekre hivatkozva a levezetést rövidebbé, gépiesebbé tehetjük.