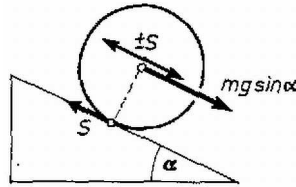


**I. feladat.** Adva van három henger: az első tömör (1), a második véges falvastagságú, belül üres cső (2), a harmadik ugyanakkora falvastagságú cső, de a fallal egyező sűrűségű folyadékkal töltve (3). A három henger hossza, külső rádiusza és össztömege egyenlő. A második henger anyagának sűrűsége a többi henger sűrűségének  $n$ -szerese. A hengereket  $\alpha$  hajlásszögű lejtőre tesszük. A súrlódási együttható a henger külső fala és a lejtő között  $\mu$ . A 3. hengernél a folyadék és a henger belső fala között a súrlódás elhanyagolható; a hengert elhanyagolható tömegű síklapok zárják le. Állapítsuk meg és hasonlítsuk össze a hengerek lineáris gyorsulását, szöggyorsulását sima legördülés és csúszva gördülés esetében.

**Megoldás.** Az  $R$  rádiuszú henger  $mg$  súlyából eredő  $mg \cos \alpha$  merőleges nyomóerőt ellensúlyozza a lejtő anyagának rugalmas ereje; ezzel ne is foglalkozunk (1. ábra).



1. ábra

Az érintkezési ponton  $S$  súrlódási erő hat. A henger középpontjában felvesszünk  $\pm S$  erőket. A henger  $a$  lineáris gyorsulását okozó erő:

$$ma = mg \cdot \sin \alpha - S.$$

A hengert  $RS$  forgatónyomaték  $\beta = a/R$  szöggyorsulással forgatja.  $\Theta$  tehetetlenségi nyomaték mellett:

$$\frac{a}{R} = \frac{RS}{\Theta}.$$

Az egyenletrendszer megoldása adja a lineáris gyorsulást és a működő súrlódási erőt:

$$(1) \quad \begin{aligned} a &= g \sin \alpha \cdot \frac{1}{1 + \Theta/mR^2}, \\ S &= mg \sin \alpha \cdot \frac{\Theta/mR^2}{1 + \Theta/mR^2}. \end{aligned}$$

Mindez csak sima legördülés esetében érvényes. A súrlódási erő előfordulható legnagyobb értéke  $\mu mg \cos \alpha$ . Keressük, ez mikor következik be:

$$\mu mg \cos \alpha_h = mg \sin \alpha_h \cdot \frac{\Theta/mR^2}{1 + \Theta/mR^2}.$$

Innen a határeset feltétele:

$$(2) \quad \operatorname{tg} \alpha_h = \mu(1 + mR^2/\Theta).$$

Ha ezt a határt túlléptük, a forgás szöggyorsulása:

$$(3) \quad \beta = \frac{\mu mg(\cos \alpha)R}{\Theta};$$

a henger középpontjának lineáris gyorsulása ekkor:

$$(4) \quad a = g \sin \alpha(1 - \mu/\operatorname{tg} \alpha).$$

1) Az első,  $\rho$  sűrűségű,  $L$  hosszúságú henger esetében a tömeg  $m = \rho \pi R^2 L$ , a tehetetlenségi nyomaték  $\Theta = 0,5 mR^2$ . Sima legördüléskor a lineáris gyorsulás (1)-ből következően:

$$(1.1) \quad a_1 = \frac{2g \sin \alpha}{3},$$

a csúszva gördülés határesetete (2)-ből:

$$(2.1) \quad \operatorname{tg} \alpha_{h1} = 3\mu,$$

csúszva gördüléskor a szöggyorsulás (3)-ből:

$$(3.1) \quad \beta_1 = 2\mu g \cos \alpha/R.$$

2) A cső esetében a fal tömege egyenlő az előbbi  $m$ -mel. A belső üreg  $r$  rádiuszát a sűrűségek  $n$  hányadosából számítjuk ki,  $\rho\pi R^2 L = n\rho\pi L(R^2 - r^2)$ , innen:

$$r^2 = R^2 \cdot \frac{n-1}{n}.$$

A tehetetlenségi nyomaték ennek figyelembevételével:

$$\begin{aligned}\Theta_2 &= 0,5 n\rho L\pi R^2 \cdot R^2 - 0,5 n\rho L\pi r^2 \cdot r^2 = 0,5 n\rho L\pi(R^4 - r^4) = \\ &= 0,5 n\rho L\pi \left[ R^4 - R^4 \cdot \frac{(n-1)^2}{n^2} \right] = 0,5 mR^2 \cdot \frac{2n-1}{n}.\end{aligned}$$

A lineáris gyorsulás a tiszta gördülésnél (1) felhasználásával:

$$(1.2) \quad a_2 = g \sin \alpha \cdot \frac{2n}{4n-1},$$

a határszög (2)-ből:

$$(2.2) \quad \operatorname{tg} \alpha_{h2} = \mu \cdot \frac{4n-1}{2n-1},$$

a forgás szöggyorsulása (3)-ból:

$$(3.2) \quad \beta_2 = \frac{2\mu g \cos \alpha}{R} \cdot \frac{n}{2n-1}.$$

3) A folyadékkal telt henger esetében a belső rész nem forog, hiszen súrlódási erő hiányában a folyadék és a fal közötti erő merőleges a falra, így nincs forgatónyomaték, amely a folyadékot forgatná.  $m$  helyébe az előbbi  $m$  teljes tömeget kell tennünk, de a tehetetlenségi nyomatékokat csak a cső falára nézve kell számítanunk:

$$\Theta_3 = 0,5\rho L\pi R^2 \cdot R^2 - 0,5\rho L\pi r^2 \cdot r^2 = 0,5mR^2 \cdot \frac{2n-1}{n^2}.$$

A lineáris gyorsulás:

$$(1.3) \quad a_3 = g \sin \alpha \cdot \frac{2n^2}{2n^2 + 2n - 1},$$

a határszög:

$$(2.3) \quad \operatorname{tg} \alpha_{h3} = \mu \cdot \frac{2n^2 + 2n - 1}{2n - 1},$$

a fal forgásának a szöggyorsulása:

$$(3.3) \quad \beta_3 = \frac{2\mu g \cos \alpha}{R} \cdot \frac{n^2}{2n-1}.$$

Következnek az összehasonlítások. A lineáris gyorsulások aránya:

$$a_1 : a_2 : a_3 = \frac{1}{3} : \frac{1}{4n-1} : \frac{n^2}{2n^2 + 2n - 1}.$$

A határszögek tangenseinek aránya:

$$\operatorname{tg} \alpha_{h1} : \operatorname{tg} \alpha_{h2} : \operatorname{tg} \alpha_{h3} = 3 : \frac{4n-1}{2n-1} : \frac{2n^2 + 2n - 1}{2n-1}.$$

A szöggyorsulások aránya:

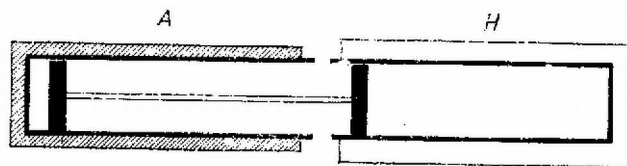
$$\beta_1 : \beta_2 : \beta_3 = 1 : \frac{n}{2n-1} : \frac{n^2}{2n-1}.$$

Csúszva gördülés esetében mindegyik henger lineáris gyorsulása egyformán a (4) szerinti érték.

Érdeemes megvizsgálni  $r$ ,  $a$ ,  $\operatorname{tg} \alpha_h$ ,  $\beta$  értékeinek változását, ha  $n$  1-től végtelenig növekszik.

**Imhof Gyula**

**II. feladat.** A 2. ábra szerinti elrendezésben az **A** hengert adiabatikus szigetelőfal, **H** hengert állandóan  $T_h = 300$  K hőmérsékletű tartály veszi körül. A hengerek alapterülete egyező. A dugattyúkat merev rúd kapcsolja össze. A dugattyúk súrlódás nélkül, lassan mozoghatnak. A **H** hengerben  $p_h = 1$  atmoszféra nyomású héliumgáz, az **A** hengerben 3 mól argon van, kezdetben 1 atmoszféránál nagyobb  $p_a$  nyomáson. A dugattyúkat elengedve olyan végső egyensúly áll be, amelyben az argon térfogata a kezdeti térfogat 8-szorosa, vagyis  $8V_a$ , a hélium sűrűsége a kezdeti érték kétszerese és az állandó hőmérsékletű hőtartály 10 800 cal-t vett fel. Határozzuk meg a gázok kezdeti és végső adatait!



$n_a = 3 \text{ mól}$			$n_h \text{ mól}$		
<i>Kezdeti adatok:</i>					
$p_a$	$V_a$	$T_a$	$p_h = 1 \text{ atm}$	$V_h$	$T_h = 300 \text{ K}$
<i>Végső adatok:</i>					
$p$	$8V_a$	$T$	$2p_h = 2 \text{ atm}$	$V_h/2$	$T_h = 300 \text{ K}$

2. ábra

**Megoldás.** Ha a változatlan hőmérsékletű hélium térfogata feleződött, akkor nyomása megkétszereződött, vagyis a kísérlet végén 2 atmoszféra lett.

Az  $n_h$  mól hélium által felvett hőmennyiség az izotermális változás közben:

$$Q = n_h \cdot RT \lg(p_2/p_1).$$

A gázállandó  $R = 2 \text{ cal/fok}$  értékét és feladatunk adatait használva  $10\,800 = n_h \cdot 2 \cdot 300 \cdot \lg 2$ , innen a hélium mennyisége  $n_h = 60 \text{ mól}$ . Ennek térfogata a kísérlet kezdetén  $V_h = 60 \cdot 22,4 \cdot 300 / 273 = 1477 \text{ liter}$ , a kísérlet végén  $1477/2 = 738,5 \text{ liter}$ . Tehát a héliumról már mindent tudunk.

Az argonra alkalmazzuk a  $pV^\kappa = \text{konst}$  adiabatikus törvényt:

$$p_a V_a^\kappa = p (8V_a)^\kappa.$$

Vagyis  $p_a/p = 8^{5/3} = 21,8$ . (Egyatomos gázoknál  $\kappa = 5/3$ ). Az argon végső nyomása az egyensúly beálltakor annyi, mint a hélium végső nyomása, vagyis  $p = 2 \text{ atmoszféra}$ . Kezdeti nyomása  $p_a = p \cdot 21,8 = 43,6 \text{ atmoszféra}$ .

A két gáz térfogatváltozása egyenlő. Az argon térfogatnövekedése  $8V_a - V_a = 7V_a$ . A hélium térfogatvesztése  $738,5 \text{ liter}$ , tehát  $7V_a = 738,5 \text{ liter}$ ,  $V_a = 738,5 \text{ liter} : 7 = 105,5 \text{ liter}$ . Az argon végső térfogata  $8V_a = 844 \text{ liter}$ .

Az adiabatikus változás törvénye  $TV^{\kappa-1} = \text{konst}$  alakban is ismeretes. A mi esetünkben:

$$T_a V_a^{2/3} = T (8V_a)^{2/3}, \quad \text{vagyis} \quad T_a/T = 8^{2/3} = 4.$$

Az argon adiabatikus kiterjedésekor belső energiájának csökkenése egyenlő a végzett munkával. A mi kísérletünkben ez végső soron a hélium hőtartályába vándorol, róla tudjuk, hogy  $10\,800 \text{ cal}$ . Az argon állandó térfogat melletti moláris fajhője  $C_V = 3 \text{ cal/mól} \cdot \text{fok}$ , tehát:

$$10\,800 = 3 \cdot 3(T_a - T).$$

Innen az argon hőmérsékletére vonatkozó második egyenletünk:

$$T_a - T = 1200 \text{ K}.$$

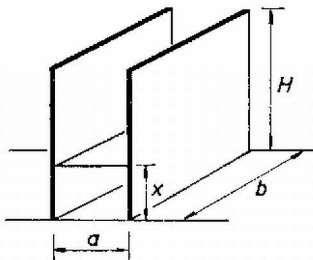
Egybevetve az előbbi  $T_a/T = 4$  egyenlettel az egyenletrendszer megoldása:

$$T_a = 1600 \text{ K}, \quad T = 400 \text{ K}.$$

**Szabó Zoltán**

*Megjegyzés.* A külső nyomást illetően a legjobb a hengereken kívül légüres teret elképzelni. Az eredeti feladat adatai nem voltak ügyesen megválasztva, a szöveg is kifogásolható volt. Kérdezték azt is, mi történik, ha a kísérlet után a két gázt összeeresztjük. Az eredmény könnyen kiszámítható. Továbbá az eredeti szöveg az adiabatikus változás törvényének kinetikus levezetését is bekapcsolta a feladatba, aminek szintén nincs akadálya.

**III. feladat.** *Téglalap alakú, függőleges helyzetű feltöltött síkkondenzátort alsó szélével folyékony dielektrikumhoz érintünk (3. ábra). Meddig húzódik fel a folyadék a lemezek között? A kapilláris hatás elhanyagolható.*



3. ábra

**Megoldás.** A folyadék sűrűsége  $\rho$ , relatív dielektromos állandója  $\varepsilon$ . Eredetileg a kondenzátor kapacitása  $kbH/a$ . Ha  $x$  magassáig húzódik fel a folyadék, akkor a részkapacitások alul  $\varepsilon kbx/a$ , felül  $kb(H-x)/a$ . Kísérlet előtt  $U_0$ , a kísérlet után  $U$  a lemezek potenciálkülönbsége. A folyadék felszívódása után a töltés ugyanannyi, mint előtte:

$$kbHU_0/a = \varepsilon kbxU/a + kb(H-x)U/a.$$

Innen a kísérlet utáni potenciálkülönbség:

$$(5) \quad U = \frac{H}{H + (\varepsilon - 1)x} \cdot U_0.$$

A kondenzátor elektromos energiája  $0,5CU^2$ . A felszívott folyadék helyzeti energiája  $0,5\rho abxg \cdot x$ . A kísérlet után a kondenzátor összes energiája, (5) figyelembevételével:

$$E = \frac{\rho abgx^2}{2} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\varepsilon kbx}{a} + \frac{kb(H-x)}{a} \right] U^2 = \frac{\rho abgx^2}{2} + \frac{H^2 kbU_0^2}{2a[H + (\varepsilon - 1)x]}.$$

Úgy áll be az egyensúlyi helyzet, hogy az összes energia minimum legyen, vagyis teljesülnie kell a következő feltételnek:

$$\frac{dE}{dx} = \rho agx - \frac{kbH^2U_0^2(\varepsilon - 1)}{2a[H + (\varepsilon - 1)x]^2} = 0.$$

Rendezve  $x$ -re vegyes harmadfokú egyenletet kapunk, amelyet pl. próbálgatással közelítve megoldhatunk.  $a$ ,  $H$  méterben,  $\rho$   $\text{kg/m}^3$ -ben,  $U_0$  voltban helyettesítendő,  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ ,  $k = 8,86 \cdot 10^{-14} \text{ farad/cm}$ .

Erőhatással leírva az a helyzet, hogy a lemezek között a folyadék határfelületén inhomogén tér alakul ki és ez emeli fel a folyadékot.

**Kövér András**

**IV. feladat.**  $2r$  átmérőjű,  $n_0$  törésmutatójú anyagból készült vékony bikonvex lencse görbületi sugarai  $R_1$  és  $R_2$ . A lencse egyik oldalán  $n_1$ , a másik oldalán  $n_2$  törésmutatójú anyag van. A szokásos közelítések érvényesek.

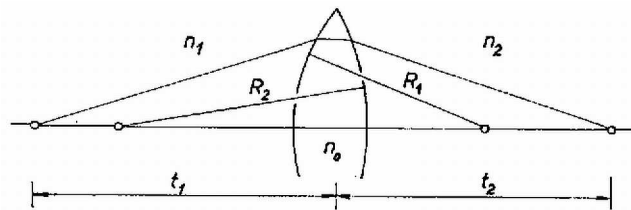
a) Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{f_1}{t_1} + \frac{f_2}{t_2} = 1,$$

ahol  $f_1$  és  $f_2$  a két oldalon mérhető fókusztávolság,  $t_1$  az egyik,  $t_2$  a másik oldalon mért tárgy-, illetve képtávolság.

b) A lencsét síkjára merőlegesen két részre vágjuk szét és a részeket kis  $\delta$  távolságra távolítjuk el. Mindkét oldalon levegő van. A lencse egyik oldalán  $t$  távolságban pontszerű, monokromatikus fényforrást helyezünk el, ( $t > f$ ). A lencsétől  $H$  távolságban levő ernyőn hány interferenciacsík keletkezik?

**Megoldás.** a) A jelöléseket a 4. ábra tünteti fel.



4. ábra

Ismeretes, hogy ilyen általános esetben:

$$(6) \quad \frac{n_1}{t_1} + \frac{n_2}{t_2} = \frac{n_0 - n_1}{R_1} + \frac{n_0 - n_2}{R_2}.$$

(Levezetése megtalálható többek között *Vermes Miklós: Fizikai kísérletek – fizikai feladatok c. könyvének* 131. oldalán.)

Az  $f_1$  gyújtótávolság az  $n_2$  törésmutatójú anyagból párhuzamosan érkező sugarak találkozási pontjának távolságát jelenti. A  $t_2 = \infty$  helyettesítés (6)-ból ezt adja:

$$\frac{n_1}{f_1} = \frac{n_0 - n_1}{R_1} + \frac{n_0 - n_2}{R_2},$$

innen:

$$(7) \quad n_1 = f_1 \left[ \frac{n_0 - n_1}{R_1} + \frac{n_0 - n_2}{R_2} \right].$$

Hasonlóan az  $n_1$ -ből párhuzamosan érkező sugarakra  $t_1 = \infty$  alapján:

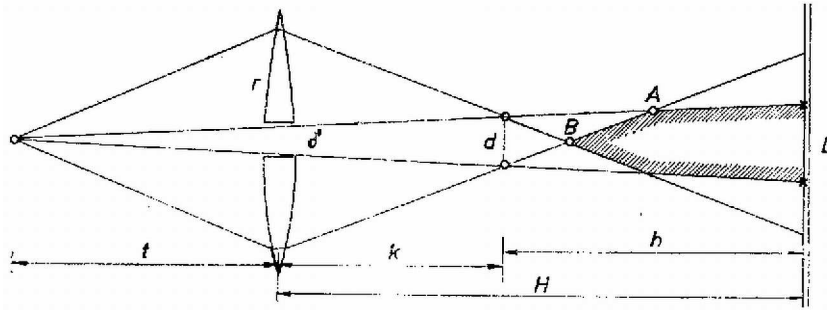
$$(8) \quad n_2 = f_2 \left[ \frac{n_0 - n_1}{R_1} + \frac{n_0 - n_2}{R_2} \right].$$

(7) és (8) alatti eredményeinket (6)-ban az egyenlet bal oldalán  $n_1$  és  $n_2$  helyére téve és a szögletes zárójelben levő kifejezéssel egyszerűsítve:

$$\frac{f_1}{t_1} + \frac{f_2}{t_2} = 1.$$

Az eredeti feladat egy speciálisabb esetben kívánta meg a bizonyítást.  $n_1 = n_2 = 1$  esetében a közismert lencsetörvényt kapjuk meg.

b) Az  $f$  gyújtótávolságú lencse elé  $t$  távolságba helyezett pontszerű fényforrásról két reális képet kapunk  $k = tf/(t - f)$  távolságban (5. ábra).



5. ábra

Ha a rés szélessége  $\delta$ , akkor a reális képek egymástól mért távolsága a  $d/\delta = (t + k)/t$  aránypár alapján:

$$(9) \quad d = \delta \cdot \frac{t + k}{t} = \frac{\delta t}{t - f}.$$

Ez a két reális kép két koherens fényforrás, és közös fénykúpjukban interferenciát figyelhetünk meg. Az ismert fénytani képlet alapján (l. például Fizika a gimn. szakosított III. o. sz., II. kötet 249. oldal) a fényforrásoktól  $h$  távolságban,  $\lambda$  hullámhossz esetében az interferenciacsíkok távolsága:

$$s = \frac{\lambda h}{d}.$$

A mi esetünkben  $h = H - k = [H(t - f) - tf] : (t - f)$ , továbbá (9) felhasználásával:

$$(10) \quad s = \frac{\lambda}{\delta t} [H - (t - f) - tf].$$

Felfogó ernyőnkön a közös fénykúp  $D$  átmérője a  $D/\delta = (H + t)/t$  aránypár alapján:

$$(11) \quad D = \delta \cdot \frac{H + t}{t}.$$

Az interferenciacsíkok  $N$  darabszámát (11) és (10) osztásával kapjuk:

$$N = \frac{D}{s} = \frac{\delta^2}{\lambda} \cdot \frac{H + t}{H(t - f) - tf}.$$

Számadatok példaképp:  $f = 10$  cm,  $t = 20$  cm,  $\delta = 0,1$  cm,  $\lambda = 0,5\mu$ ,  $H = 50$  cm,  $N = 46,6$ .

Ha az ernyő  $A$  pontnál közelebb kerül, új számítást kell végeznünk  $D$  meghatározására.  $B$  ponton belül nem keletkezik interferencia.

**Éber Nándor**

**V. Kísérleti feladat.** *Adva van két ugyanazon anyagból készült henger. Külső méreteik megegyeznek. Az egyik tömör, a másikban végig hengeres üreg van, a külső henger tengelyével párhuzamosan. Az elzáró lemezek vékonyak. Határozzuk meg az anyag sűrűségét, az üreg átmérőjét, az üreg és henger tengelyeinek távolságát!*

**Megoldás.** A hengerek anyagának sűrűségét abból határoztam meg, hogy a tömör henger vízben úszva milyen mélyen merült be. (A henger vízszintes tengellyel úszott). Az üreges henger úsztatásával ennek átlagos fajtsúlyát határoztam meg. Ebből számítható volt az üreg átmérője. Az üreg tengelyének távolságát úgy határoztam meg, hogy az üreges hengert lejtőre helyeztem és a lejtő hajlásszögét mértem meg a henger elindulásának pillanatában. Ekkor a furat tengelye, a külső henger tengelye és az üreges henger súlypontja egyetlen vízszintes síkban van, továbbá a súlypont függőlegesen az alátámasztási pont fölött van. Így megtudjuk, hogy milyen messze van a súlypont a középtől, és az üreg átmérőjének ismeretében meghatározható a két tengely távolsága.

**Gács Lajos**