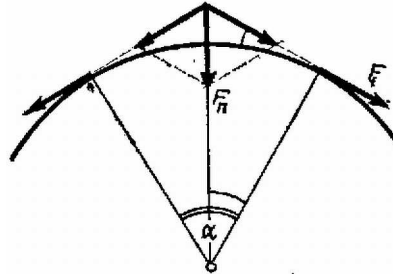


Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat október 23-án rendezte ez évi fizikai versenyét. A versenyzők 5 óráig dolgozhattak és bármilyen segédeszközt használhattak. Az alábbiakban ismertetjük a verseny feladatait és azok megoldását.

1. r rádiuszú kerék kerületére vékony gumikarikát feszítünk, amelynek tömege m , eredeti hossza L és hosszegységgel való megnyújtásához D erő szükséges. A súrlódási együttható a kerék kerülete és a gumikarika között μ . A kereket nyugalomból kiindulva β állandó szöggyorsulással forgatjuk. Mekkora szögsebességnél csúszik meg a karika? Mekkora szögsebességnél esik le?

Megoldás. Ha a kerékre ráfeszítjük a gumikarikát, akkor hosszát megnöveltük $(2\pi r - L)$ darabbal, aminek következtében a gumiszalagban $(2\pi r - L)D$ rugalmas erő támad. Ez a rugalmas erő mindenütt az érintő mentén működik. Ki kell számítani, hogy F_t érintő mentén működő erő mekkora középpont felé irányuló, az érintőre merőleges F_n erőt hoz létre a kerület minden pontjában (1. ábra).



1. ábra

Ha a körív α középponti szöghöz tartozó darabját nézzük, akkor $F_n = 2F_t \sin(\alpha/2)$. Kis α szög esetében, a szöget mindig radiánban számítva $F_n = \alpha F_t$.

Az előbb számított $(2\pi r - L)D$ rugalmas erőből származó merőleges erő $(2\pi r - L)D\alpha$. A gumikarika α szöghöz tartozó darabját a kerülethez odaszorító erőt megkapjuk, ha kivonjuk belőle a centrifugális erőt. Az α középponti szöghöz tartozó karikarész tömege $\alpha m/(2\pi)$. Ezt szorozva $\omega^2 r$ -rel kapjuk a centrifugális erőt: $\alpha m \omega^2 r/(2\pi)$. Végeredményben a vizsgált tömegrészt merőlegesen a kerékhez odaszorító erő:

$$(1) \quad (2\pi r - L)D\alpha - \frac{m\omega^2 r}{2\pi} \cdot \alpha.$$

Ahhoz, hogy a gumikarika a kerék kerületével együtt $\alpha = \beta r$ gyorsulással gyorsuljon, $\alpha m \beta r/2\pi$ gyorsító erő szükséges az érintő irányában. A merőlegesen odaszorító erőből származó lehetséges legnagyobb súrlódási erőt megkapjuk, ha az (1) alatti erőt μ -vel szorozzuk. Mivel a súrlódás adja át a kerékről a karikának a gyorsító erőt, azért azt az ω_1 szögsebességet, amely felett a karika megcsúszik, úgy kapjuk meg, hogy a maximálisan lehetséges súrlódási erőt egyenlővé tesszük a gyorsításhoz szükséges erővel:

$$\mu \left[(2\pi r - L)D\alpha - \frac{m\omega_1^2 r}{2\pi} \cdot \alpha \right] = \frac{m\beta r \alpha}{2\pi}.$$

Innen:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2\pi(2\pi r - L)D}{mr} - \frac{\beta}{\mu}}.$$

Ezzel válaszoltunk az első kérdésre. Az ún. leesés feltétele, hogy az (1) alatti odaszorító erő eltűnjön. Ebből az egyenletből az ehhez szükséges ω_2 :

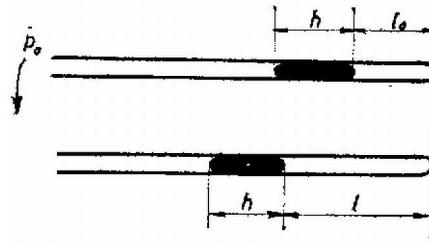
$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2\pi(2\pi r - L)D}{mr}}.$$

Miközben a kerék szögsebessége állandó szöggyorsulással tovább növekszik, ω_1 elérése után a gumikarika szögsebessége már kisebb, mint a keréké, és ω_2 a gumikarika szöggyorsulásának felső határát jelenti, amelyet csak aszimptotikusan közelít meg.

Az adatok számértékei a versenyfeladatban a következők voltak: $r = 10 \text{ cm} = 0,1 \text{ m}$; $m = 1,256 \text{ kg}$; $L = 0,608 \text{ m}$; $D = 0,05 \text{ kp/cm} = 50 \text{ newton/m}$; $\mu = 0,02$; $\beta = 2 \text{ s}^{-2}$. Ezekkel az adatokkal a gumikarika már az indulás pillanatában megcsúszik, mert a rugalmas erő a centrifugális erő beszámítása nélkül sem tud akkora súrlódási erőt létrehozni, amely a kerékkel egyező gyorsulással gyorsítaná a karikát. A karika szögsebességének felső határértéke $\omega_2 = 7,07 \text{ s}^{-1}$. Amennyiben a karika tömege $0,1256 \text{ kg}$, a megcsúszás szögsebessége $\omega_1 = 20 \text{ s}^{-1}$ és $\omega_2 = 22,4 \text{ s}^{-1}$.

2. $L = 1$ méter hosszú, egyik végén beforrasztott vékony üvegcsőben 1 atmoszféra nyomás mellett $h = 20 \text{ cm}$ hosszú higanyoszlop zár el $l_0 = 20 \text{ cm}$ hosszú légoszlopot: A csövet zárt vége körül $\omega = 6 \text{ s}^{-1}$ szögsebességgel forgatjuk vízszintes síkban. Milyen hosszú most az elzárt légoszlop?

Megoldás. Adott szögsebességgel történő forgás közben a légoszlop hossza l (2. ábra).



2. ábra

A külső légnyomás p_0 . Forgás közben a légoszlop belsejében a nyomás Boyle–Mariotte törvénye szerint $p = p_0 l_0 / l$. Számítani kell a higanyra ható centrifugális erőt. Felhasználva a higany ϱ sűrűségét, az egységnyi alapterületű higanyoszlop tömege $h\varrho$. Tekintettel arra, hogy $m\omega^2 r$ centrifugális erő a középponttól mért távolsággal egyenes arányban növekszik, a higanytömegre ható centrifugális erőt úgy számíthatjuk, mintha a higany a forgástengelytől $l + h/2$ távolságban volna, és így a centrifugális erőből származó, kifelé vivő nyomás $h\varrho\omega^2(l + h/2)$. A higanyt kifelé vivő nyomások összege egyensúly esetében egyenlő p_0 külső nyomással:

$$(2) \quad p_0 = \frac{p_0 l_0}{l} + h\varrho\omega^2 \left(l + \frac{h}{2} \right).$$

l ismeretlenre rendezve:

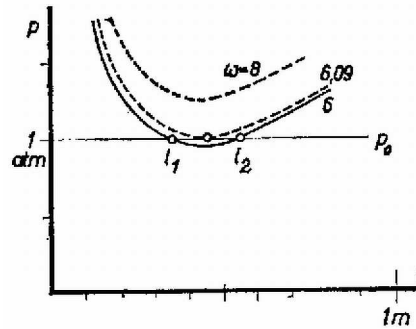
$$l^2 + \left(\frac{h}{2} - \frac{p_0}{h\varrho\omega^2} \right) l + \frac{p_0 l_0}{h\varrho\omega^2} = 0.$$

Ennek megoldása:

$$l = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{p_0}{h\varrho\omega^2} - \frac{h}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p_0}{h\varrho\omega^2} - \frac{h}{2} \right)^2 - \frac{4p_0 l_0}{h\varrho\omega^2}} \right].$$

Feladatunk számadatait célszerűen ilyen alakban használjuk: $p_0 = 10 \text{ newton/cm}^2 = 10^5 \text{ newton/m}^2$; $l_0 = 0,2 \text{ m}$; $h = 0,2 \text{ m}$; $\varrho = 13,6 \text{ gramm/cm}^3 = 1,36 \cdot 10^4 \text{ kg/m}^3$; $\omega = 6 \text{ s}^{-1}$. Így $p_0/h\varrho\omega^2 = 1,021 \text{ méter}$, és az egyenlet két megoldása: $l_1 = 37,2 \text{ cm}$, $l_2 = 54,9 \text{ cm}$. Mindegyik esetben a higany az 1 méter hosszú esőben marad.

Meg kell vizsgálnunk a feladat eredményeként adódó két egyensúlyi helyzet minőségét. Grafikusan ábrázoljuk a légoszlop l hosszának függvényében a higanyt kifelé vivő nyomást, amelyet (2) jobb oldala ad meg (3. ábra).



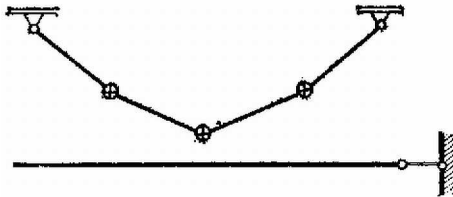
3. ábra

Minimumot végigfutó görbét kapunk. Ennek a $p_0 = 1$ atmoszféra magasságban húzott egyenessel alkotott metszéspontjai mutatják a feladat l_1 és l_2 megoldásait. Azonnal kiderül, hogy ha a higany kifelé csúszna, akkor ezzel l_1 -nél a befelé vivő, l_2 -nél a kifelé vivő nyomás válna nagyobbá. Tehát l_1 stabilis, l_2 labilis egyensúlyi helyzetet jelent. A higany befelé való elmozdulásából is ugyanez következik.

Amennyiben ω szögsebesség nagyobb, a kifelé vivő nyomást ábrázoló görbe feljebb tolódik. $\omega = 6,09 \text{ s}^{-1}$ szögsebességnél a megoldás képletében a diszkrimináns nulla lesz, a görbe érinti az 1 atmoszféra magasságában húzódó egyenest, és egyetlen egyensúlyi helyzet adódik, amely labilis. Még nagyobb szögsebességnél semmiféle egyensúlyi helyzet sem lehetséges.

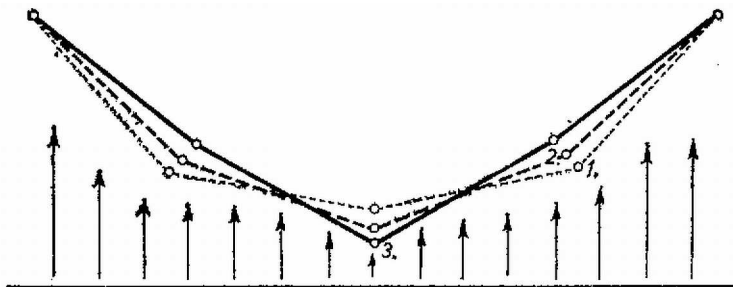
3. Nagy kiterjedésű, sík, földelt fémlap fölött a 4. ábrán látható módon elhanyagolható súlyú, szigetelő fonálon rögzítve egyenlő tömegű, szigetelő anyagból készült kis golyók függenek. A golyók mindegyikének ugyanakkora, egyenletesen elosztott pozitív elektromos töltése van. Megváltozik-e a golyósor alakja, ha a fémlapra pozitív elektromos feszültséget kapcsolunk?

(Károlyházi Frigyes)



4. ábra

Megoldás. Először is azt kell belátnunk, hogy már a földelt fémlap esetében sem olyan a golyósor alakja, mint amikor a fémlap nincs ott. Tegyük fel, hogy először csak a golyósor van jelen, a potenciálok vonatkoztatási pontja, a Föld valahol nagyon messze van. A golyósor alakját az 5. ábrán az 1. számú pontozott vonal tünteti fel. Amennyiben a golyók súlya egyenlő, mindig ez az alak jön létre.



5. ábra

Ezután helyezzük el az igen nagy kiterjedésű fémlapot. A megosztás folytán a lapban mutatkozó negatív töltések lefelé húzzák a golyókat, de a középső golyót erősebben, mert közelebb van a lemezhez. (A vonzóerők egyébként úgy számíthatók, mintha a megosztott töltések az eredetieknek a tükörképei volnának.) Mivel a megosztott töltések a középső golyót nagyobb erővel vonzzák, mint a szélsőket, a golyósor közepén kihegyesedik, a középső golyó lejjebb húzódik (2. számú, szaggatott vonal). Ne felejtjük el, ez a kihegyesedés annál nagyobb mértékű, minél könnyebbek a golyók. Ebben az állapotban kezdődik a feladat szövege.

Ha a fémlapot pozitív feszültségre kapcsoljuk, akkor környezetében homogén elektromos tér jön létre. Ha a lap elég nagy kiterjedésű, akkor ez a tér gyakorlatilag homogén, és így mindegyik golyót ugyanakkora erővel taszítja. Ez a taszítás olyan, mintha a golyók könnyebbekké váltak volna. De előbbi megfontolások szerint a középén nagyobb, a széleken kisebb elektromos erő, amelyet a most is működő megosztás jelent, könnyebb golyóknál nagyobb hegyesedést okoz. Így pozitív feszültség esetében a pozitív töltésű középső golyó lejjebb húzódik a 3. számú folytonos vonal szerint.

A verseny eredménye: I. díjat nyert *Nagy András* honvéd (a budapesti Fazekas Gimnáziumban Hutay Ferenc volt tanítványa). A II. díj nem került kiosztásra. III. díjat nyert *Szabó Zoltán*, a budapesti Apáczai Csere Gimnázium IV. osztályos tanulója (tanára Turtóczky Sándor). Dicséretet kaptak és könyvjutalomban részesültek *Balog János*, a budapesti I. István Gimnázium IV. osztályos tanulója (tanára Moór Ágnes), *Horváth László*, a hódmezővásárhelyi Bethlen Gábor Gimnázium IV. osztályos tanulója (tanára Horváth István és Bodrogi Sándor), *Kövér András*, a debreceni Kossuth Lajos gimnázium IV. osztályos tanulója (tanára Czirjék Lászlóné), *Monostori László*, a budapesti Műszaki Egyetem villamosmérnök hallgatója (a budapesti Fazekas Gimnáziumban Hutay Ferenc volt tanítványa), és *Vassel Róbert*, a budapesti I. István Gimnázium IV. osztályos tanulója (tanára Moór Ágnes).