

I. forduló, kezdők (legfőljebb I. osztályosok) részére

1. Egy függőleges táblára három fogaskereket szerelünk, mindegyiknek egy-egy foga pirosra van festve. Tengelyeik egy vízszintes egyenes mentén helyezkednek el. Rendre 15, 27, 21 foguk van. A középső fogaskerék kapcsolódik mindkét másikhoz. A kiindulási helyzetben mindegyik fogaskerék piros foga vízszintes helyzetű és jobbra mutat. Hányszor kell a 15 fogú kereket az óramutató járásával egyező irányban megforgatnunk, hogy újra a kiindulási helyzetbe jussunk?

2. Egy négyszögről András azt állítja, hogy négyzet; Balázs azt, hogy paralelogramma; Csilla azt, hogy trapéz; Dóra pedig azt, hogy deltoid. A tanár megállapítja, hogy az elhangzott négy állítás közül három igaz, egy nem. Mit mondhatunk a négyszögről?

3. Az ABC derékszögű háromszögben $BAC \angle = 30^\circ$. Rajzoljunk az AC befogó fölé kifelé négyzetet, középpontja legyen O_1 , a BC befogó fölé kifelé szabályos háromszöget O_2 középponttal. Mekkora szöget zár be az AO_1 és AC felezőpontjain átmenő egyenes a BO_2 és BC felezőpontjain átmenő egyenessel?

4. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned}2^{3x+7y} &= 256, \\ 6x + 4y &= 5.\end{aligned}$$

5. A 100 000-nél kisebb természetes számok közt azok vannak-e többen, amelyek 10-es számrendszerben írt alakjában előfordul az 1-es számjegy vagy azok, amelyekben nem fordul elő?

6. Van-e olyan hatjegyű négyzetszám, amelynek számjegyei valamilyen sorrendben az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számok?

7. Igazoljuk, hogy ha egy konvex négyszöget a két átlója négy egyenlő területű háromszögre bontja, akkor a négyszög paralelogramma.

8. Egy téglatest élei 4, 16 és 27 egységnyi hosszúak. Vágjuk szét legfeljebb 15 részre úgy, hogy azokból egy kockát lehessen összeállítani.

9. Hol helyezkednek el a koordináta-rendszerben azok a pontok, amelyeknek (x, y) koordinátái kielégítik az alábbi két egyenlőtlenséget:

$$\begin{aligned}|x| + |y| &< 3, \\ |x + y| + |x - y| &< 4.\end{aligned}$$

10. Adott az ABC háromszög köré írt kör sugara, az A -ból induló szögfelező hossza és a háromszög köré írt kör középpontját A -val összekötő egyenesnek a BC egyenessel alkotott szöge. Szerkesszük meg a háromszöget!

11. Egy nagy víztárolót egy állandó erősségű forrás táplál. A víztárolóból egy óriásszivattyú és 18 egyforma teljesítményű kis szivattyú emeli ki a vizet. Az óriásszivattyú percenként 32-szer annyi vizet emel ki, mint egy-egy kis szivattyú. Ha a víztároló éppen félig van vízzel és az összes szivattyú működik, akkor 5 nap és 20 óra múlva kiürül. Ha a tároló $3/4$ részéig van vízzel, és csak az óriásszivattyút működtetjük, akkor a tároló 4 nap és 14 óra múlva megtelik. Jelenleg a tároló harmadrésze van megtöltve. Hány szivattyút kell bekapcsolnunk, ha azt akarjuk, hogy az elkövetkezendő 90 nap folyamán ne teljen meg, de ki se ürüljön a víztároló? (Ez alatt a 90 nap alatt nem változtatunk azon, hogy mely szivattyúk működnek és melyek nem.)

12. Egy futóversenyen négyen vettek részt: A , B , C , D . A versenyt egy N néző is végignézte. A verseny után a következőket mondták:

A : – Nem én nyertem, de C -t megelőztem.

B : – Megelőztem C -t.

C : – D előbb ért célba, mint B .

D : – Nem én voltam az utolsó.

N : – Az előbb az első helyezett nem mondott igazat, a többiek igazat mondtak.

Az eredményhirdetésekor kiderült, hogy ezen öt kijelentés közül legalább három igaz. Bizonyítsuk be, hogy C nincs az első két helyezett között. Lehetséges-e, hogy N igazat mondott.

I. forduló, haladók (legfeljebb II. osztályosok) részére

1. Egy téglalap két oldala 20 cm és 30 cm. A téglalap két szemközti csúcsából kiindulva mind a négy oldalára egyenlő hosszúságokat mérünk fel; ezek második végpontjai paralelogrammát alkotnak. Mekkora hosszúság felmérése esetén lesz az említett paralelogramma területe maximális?

2. Bizonyítsuk be, hogy ha

$$x + y + z = 0,$$

akkor

$$\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}\right) \left(\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3}\right) = \frac{x^5 + y^5 + z^5}{5}.$$

3. Az ABC hegyesszögű háromszög AB oldala 14 cm, BC oldala 13 cm, a C pontból induló magassága 12 cm. Számítsuk ki annak a körnek a sugarát, amelyik érinti a háromszög két említett oldalát, és a kör középpontja a háromszög CA oldalán van.

4. Bizonyítsuk be, hogy ha az a , b , c és d számok pozitívak és

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = 2 - \sqrt{3},$$

akkor

$$ad + bc + 2\sqrt{abcd} - \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} = 0.$$

5. Az adott AB , BC , CD , DE és EA szakaszokra fennáll az

$$AB < CD \quad \text{és} \quad DE < BC$$

két egyenlőtlenség. E szakaszokból olyan $ABCDE$ konvex ötszög szerkesztendő, amelyben $AB \parallel CD$ és $DE \parallel BC$.

6. Állapítsuk meg közelítő törtek felhasználása nélkül, hogy a következő különbségek közül melyik nagyobb:

$$\sqrt{11} - \sqrt{5}, \quad \text{vagy} \quad \sqrt{19} - \sqrt{11} ?$$

7. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$||x + 2| - 3| = 1.$$

8. Közös síkban fekvő két kör középpontjának távolsága 20 cm, sugaraik 2 cm és 6 cm. Tekintsük mindazokat az egyenesszakaszokat, melyek egyik végpontja az egyik körön, a másik végpontja a másik körön fekszik. Mi a mértani helye e szakaszok felezőpontjainak?

9. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{1+\sqrt{3}} + \sqrt{3} + 3} + \sqrt{\frac{1}{1+\sqrt{3}} + \sqrt{3} - 1}}{\sqrt{\frac{1}{1+\sqrt{3}} + \sqrt{3} + 3} - \sqrt{\frac{1}{1+\sqrt{3}} + \sqrt{3} - 1}} = 1 + \sqrt{3}.$$

10. Egy magasugró versenyen 10 versenyző vett részt, akiket $A, B, \dots, K$ betűkkel jelölünk. A versenyzők a betűk sorrendjében ugrottak, és a betű után zárójelbe tett szám azt mutatja, hogy a kérdéses versenyző az addigiak közül hányadik lett.

$$A (1), B (2), C (1), D (4), E (4), F (1), G (1), H (3), I (3), K (6).$$

a) Megállapítandó a végső sorrend!

b) Ha az „addigi sorrendet” általánosan $A (a), B (b), \dots, K (k)$ -val jelöljük, azaz az addigi sorszám A esetében a , B esetében b , $\dots$, K esetében k , – milyen feltételeket kell teljesíteniük az $a, b, \dots, k$ számoknak, hogy az abszolút sorrendet meg lehessen belőlük állapítani?

11. Tekintsük mindazokat a háromszögeket, melyek 3 csúcsát egy a oldalú szabályos hatszög csúcsai közül választottuk ki!

a) Hány ilyen háromszög van?

b) A hatszög egy-egy főátlójára hány ilyen háromszög súlypontja esik, és ezek mekkora távolságra vannak a hatszög középpontjától?

12. Az

$$x^3 - 3x^2 + 2x + C = 0$$

egyenlet egyik gyöke egy másik gyökének kétszerese. Mekkora lehet C , és mekkorák az egyenlet gyökei?

II. forduló, kezdők (legfőljebb I. osztályosok), általános tantervű és szakosított matematika-fizika tantervű osztályok részére

1. Egy folyószakaszt egy motorcsónak fölfelé 9 óra alatt, lefelé 4 óra 36 perc alatt tesz meg. Útja egy részén a víz sebessége kétszer akkora, mint másutt. Ezt a részt fölfelé 3-szor annyi idő alatt teszi meg, mint lefelé. Hányad része az egész út hosszának a sebesebb folyású rész?

2. Egy kör két egymásra merőleges sugara OP és OQ . A körbe beírt ABC háromszög A csúcsa a rövidebbik PQ íven van és AB oldala OP -vel, AC oldala OQ -val párhuzamos. Tekintsük az ABC háromszögbe beírt és az oldalaihoz hozzáírt körök középpontjait. Mi a mértani helye e négy középpontnak, ha A befutja a PQ negyedkört?

3. Egy fa ágai kör alakban helyezkednek el. Az ágakon verebek ülnek. Megrázva a fát, két veréb felszáll és az egyik az óramutató járásával egyező, a másik azzal ellentétes irányban haladva egy ággal arrébb repül. – Lehetséges-e, hogy

a fa többszöri megrázása után mindegyik veréb ugyanarra az ágra kerül, ha a fának 44 ága van és eredetileg minden ágon egy veréb ül?

II. forduló, kezdők (legfőljebb I. osztályosok), **szakosított tantervű matematikai osztályok részére**

1. Mely n természetes számokra lesz

$$n^n + 1$$

10^{18} -nál kisebb törzsszám?

2. Azonos az előző felsorolás 2. feladatával, azzal a megkülönböztetéssel, hogy az A pont befutja az egész kört.

3. Az asztalon n dobozban golyók vannak (néhány doboz üres is lehet). Csaba a következő szabály szerint játszik: áttehet egy dobozból néhány golyót egy másikba, de csak akkor, ha ezáltal a másik dobozban levő golyók száma megduplázódik. Milyen n értékekre lehetséges az, hogy a fenti szabály betartásával Csaba az összes golyót egy dobozba tudja gyűjteni, abból a helyzetből kiindulva, amikor mindegyik dobozban pontosan egy golyó van?

II. forduló, haladók (legfőljebb II. osztályosok), **általános tantervű és szakosított matematika-fizika tantervű osztályok részére**

1. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned}xy &= zu, \\x^2 + y^2 &= z^2 + u^2 - 48, \\x^2 + u^2 &= y^2 + z^2 + 80, \\x^4 + y^4 &= z^4 + u^4 - 8160.\end{aligned}$$

2. Mely n -ekre osztható 1972-vel

$$S = 345^n + 179^n - 5^n - 26^n + 493^n ?$$

3. Adott egy háromszög. Szerkesszük meg azt a kört, amelyik a háromszög mindegyik csúcsából feleakkora szög alatt látszik, mint a háromszögnek a kérdéses csúcsnál fekvő szöge.

II. forduló, haladók (legfőljebb II. osztályosok), **szakosított tantervű matematikai osztályok részére**

1. Az

$$x^3 + px + q = 0$$

harmadfokú egyenlet együtthatói, p és q egész számok, és az egyenlet egyik gyöke: $x_1 = 2 + \sqrt{7}$. – Bizonyítsuk be, hogy az egyenlet egy másik gyöke $x_2 = -4$. Határozzuk meg az egyenlet harmadik gyökét.

2. Legyen adva n szám, amelyek összege

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1,$$

és ezenkívül

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n.$$

Bizonyítsuk be, hogy

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k \geq \frac{k}{n}, \quad \text{ahol } 1 \leq k \leq n.$$

3. Adott egy egységnyi oldalú szabályos hatszöglemez. Vágjuk be a lemezt minden oldal felezőpontján átmenő egy-egy h hosszúságú egyenes szakasszal, úgy, hogy a lemez e hat bevágás után ne essék szét. Bizonyítandó, hogy ez a követelmény $h < 1$ esetén kielégíthető, míg $h \geq 1$ esetén a feladatnak nincs megoldása.