

I. forduló

1. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned}7^{x+1} - 6^{y+3} &= 1 \\ 6^{y+2} - 7^x &= 5(6^y + 1).\end{aligned}$$

2. Egy 5 cm sugarú kört egy szelő az A és B pontban metsz. A szelő egy P pontjától A és B 12,8 cm, ill. 20 cm távolságra van. Húzzunk P -ből érintőt a körhöz, az érintési pont legyen C . Határozzuk meg az AC és BC szakaszok hosszának az arányát.

3. Az ABC derékszögű háromszög AC , ill. BC befogóján úgy választjuk az X ill. Y pontokat, hogy az

$$\frac{AX}{XC} + \frac{BY}{YC} = 1$$

egyenlőség fennálljon. Bizonyítsuk be, hogy az XY egyenes átmegy a háromszög súlypontján.

4. Adott egy r sugarú kör és annak síkjával párhuzamosan, a sítól r távolságban egy AB szakasz, amelyiknek merőleges vetülete a kör síkján a kör egy átmérője. Az AB szakasz minden belső pontjából két, a végpontjaiból egy-egy AB -re merőleges olyan félegyenest indítunk, amelyeknek van közös pontja a körrel. Milyen vonalat alkotnak annak a síknak a félegyeneseikkel való metszéspontjai, amelyek párhuzamos a kör síkjával és mind attól, mind AB -től $r/2$ távolságra van?

5. Az a, b, x, y, z valós számokra fennáll, hogy

$$x^2 = a^2 + y^2 = b^2 + z^2 = (a + b)^2 + (y - z)^2.$$

Fejezzük ki x -et a -val és b -vel.

6. Milyen n természetes számokra osztható 72-vel a következő összeg:

$$3^{(n+1)(n+2)} + 63 ?$$

7. A $\cos x$ és $\sin 2x$ függvényeket ábrázoló görbéknek a nyílt $(0, \frac{\pi}{2})$ intervallumbeli közös pontjában mindegyik görbéhez megrajzoljuk az érintőt. Mekkora szöget zárnak be egymással az érintők? Írjuk le szemlélet alapján, hogyan haladnak a görbék a két érintő által meghatározott négy szögtartományban. (Vagyis: melyik negyedben hány ív távolodik a közös ponttól?)

8. Egy ismerkedési este összegyűlő társaság tagjairól tudjuk, hogy nincs köztük 4 (különböző) ember, A, B, C, D úgy, hogy A ismeri B -t, B ismeri C -t, C ismeri D -t. Bizonyítsuk be, hogy akkor szét lehet osztani 3 terembe a társaságot úgy, hogy egy-egy termen belül senki sem ismer senkit. (Az ismeretséget kölcsönösnek tekintjük, azaz ha A ismeri B -t, akkor B is ismeri A -t.)

II. forduló

Általános és szakosított matematika-fizika tantervű osztályok részére

1. Határozzuk meg az

$$f = \frac{x}{2} + y - z$$

háromváltozós függvény maximumát a következő feltételekkel:

$$\begin{aligned}|x - 2y + z| &\leq 2, \\ |y| &\leq 3, \\ x \cdot z &\geq 0.\end{aligned}$$

2. Egy urnában 8 különböző színű golyó van. Kihúzzunk egyet és visszatesszük. Ezt összesen tízszer elvégezzük. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ily módon mindegyik golyó legalább egyszer a kezünkbe kerül?

3. Kivágtunk papírból egy ABC egyenlő szárú háromszöget. Az AB alapon felvettük az A -hoz közelebb eső D és a B -hez közelebb eső E pontot. Az ACD és BCE háromszöget a CD , illetve CE hajtásvonal körül forgatva, az A és B csúcs az F pontban találkozott. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög C csúcsának a DEF háromszög síkjára való merőleges vetülete egybeesik a DEF háromszög DE oldalához tartozó külső érintő kör középpontjával.

A speciális matematikai tantervű osztályok részére

1. A sík egymástól különböző $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ pontjaira

$$\begin{aligned} A_1 B_2 C_1 \triangleleft = B_1 C_2 A_1 \triangleleft = C_1 A_2 B_1 \triangleleft = 90^\circ, \\ A_2 B_1 = B_1 C_2, \quad B_2 C_1 = C_1 A_2, \quad C_2 A_1 = A_1 B_2. \end{aligned}$$

Bizonyítsuk be, hogy az $A_1 A_2, B_1 B_2$ és $C_1 C_2$ egyenes egy ponton megy keresztül.

2. A $0 < x < 1$ intervallumban értelmezett $f(x)$ függvény x -hez azt a 0 és 1 közötti számot rendeli, amelyiknek tízes számrendszerbeli alakjában az n -edik tizedes jegy n -nel vagy 0-val egyenlő aszerint, hogy x n -edik tizedes jegye egyenlő volt-e n -nel vagy sem ($n = 1, 2, \dots$). Integrálható-e az $f(x)$ függvény a $(0, 1)$ intervallumban, és ha igen, mennyi az integrálja?

3. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges, a $[0, 1]$ zárt intervallumban értelmezett $f(x), g(x)$ függvénytárhoz van olyan $0 \leq x \leq 1$ és $0 \leq y \leq 1$, amelyre

$$|f(x) + g(y) - xy| \geq \frac{1}{4}.$$