

Gauss-féle binomiális együtthatók¹

I. rész

A binomiális együtthatók szerepelnek a középiskolai tantervben, kapcsolatuk a kombinatorikával Leibniz, Pascal és Jacob Bernoulli kora óta jól ismert. Az ún. „Gauss-féle binomiális együtthatók” sokkal kevésbé közismertek, kapcsolatuk a kombinatorikával pedig új keletű. Ezért a Gauss-féle és a közönséges binomiális együtthatók néhány kapcsolatának megvilágítása bizonyára új szint ad egy hagyományos középiskolai anyagrésznek.

1. *Definíció:* Gauss-féle binomiális együtthatónak nevezzük az

$$(1.1) \quad \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \frac{(q^n - 1)(q^{n-1} - 1) \cdot \dots \cdot (q^{n-r+1} - 1)}{(q - 1)(q^2 - 1) \cdot \dots \cdot (q^r - 1)}$$

kifejezést, ahol n és r a $0 < r \leq n$ feltételt kielégítő egészek, q változó, amely minden 1-től különböző értéket felvehet;² a definíciót kiegészítjük az $r = 0$ esetre és megemlíjük az $r = n$ speciális esetet:

$$(1.2) \quad \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 1, \quad \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1.$$

A $q = 1$ esetet ki kellett zárunk, mert a nevező minden tényezője osztható $q - 1$ -gyel, de a számlálói is. Ha viszont ezekkel a tényezőkkel egyszerűsítünk, azt kapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \frac{(q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q + 1)(q^{n-2} + \dots + 1) \cdot \dots \cdot (q^{n-r} + \dots + 1)}{1 \cdot (q + 1) \cdot (q^2 + q + 1) \cdot \dots \cdot (q^{r-1} + \dots + 1)},$$

és ez tetszés szerint megközelíti az

$$(1.1^*) \quad \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{n-r+1}{r} = \binom{n}{r}$$

közönséges binomiális együtthatót, ha q elég közel van az 1-hez.

2. *A bimomiális tétel egy általánosítása.* Vezessük be az x változó következő polinomját:

$$(2.1) \quad f(x) = (1+x)(1+qx) \cdot \dots \cdot (1+q^{n-1}x);$$

ennek a gyökei n elemű mértani sorozatot alkotnak q^{-1} hányadossal és -1 első elemmel. Tűzzük ki következő feladatunkul az

$$(2.2) \quad f(x) = Q_0 + Q_1x + Q_2x^2 + \dots + Q_nx^n$$

x hatványai szerint rendezett alak együtthatóinak meghatározását. Nyilvánvaló, hogy

$$(2.3) \quad Q_0 = 1, \quad Q_n = q^{n(n-1)/2}.$$

Feladatunk megoldásában segítségünkre lesz annak észrevétele, hogy (2.1)-ből azonnal következik az

$$(2.4) \quad (1+x) \cdot f(qx) = f(x) \cdot (1+q^n x)$$

összefüggés, vagy beírva ide (2.2)-t, azt kapjuk, hogy

$$(2.5) \quad (1+x)(Q_0 + Q_1qx + \dots + Q_rq^rx^r + \dots + Q_nq^nx^n) = (1+q^nx)(Q_0 + Q_1x + \dots + Q_rq^rx^r + \dots + Q_nx^n).$$

A két oldalon x hatványainak az együtthatóit összehasonlítva azt kapjuk, hogy

$$(2.6) \quad Q_rq^r + Q_{r-1}q^{r-1} = Q_r + q^n Q_{r-1}$$

vagy átrendezve

$$(2.7) \quad Q_r = Q_{r-1} \cdot \frac{q^{n-r+1} - 1}{q^r - 1} \cdot q^{r-1},$$

ha $r = 1, 2, 3, \dots, n$. (2.7) ismételt alkalmazása (2.3) és (1.1) figyelembevételével azt adja, hogy

$$(2.8) \quad Q_r = \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} q^{r(r-1)/2}.$$

¹ Megjelent az *Elemente der Mathematik* 26 (1971), 102–109. oldalán. Fordította a K.M.L. céljára kisebb módosításokkal *Surányi János*.

² Vö. *Carl Friedrich Gauss*, *Summatio quarundam serierum singularium*. Összegyűjtött művei 2. köt., főképp 16–17. o.

Így (2.1) és (2.2) alapján azt kapjuk, hogy

$$(2.9) \quad (1+x)(1+qx) \cdot \dots \cdot (1+q^{n-1}x) = \\ = \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} x + \dots + \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} q^{r(r-1)/2} x^r + \dots + \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} q^{n(n-1)/2} x^n,$$

és ha q az 1-hez közeledik, határesetként az

$$(2.9^*) \quad (1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} x + \dots + \binom{n}{n} x^n$$

binomiális tételt, kapjuk.

3. *Rekurziós formula.* (2.9) bal oldalából az n helyett $n+1$ -hez tartozó megfelelő kifejezést úgy kapjuk, hogy $(1+q^n x)$ -szel szorzunk. A jobb oldalakból a kétféle átalakítással az

$$(1+q^n x) \left(\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} x + \dots + \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} q^{r(r-1)/2} x^r + \dots + \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} q^{n(n-1)/2} x^n \right) = \\ = \begin{bmatrix} n+1 \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} n+1 \\ r \end{bmatrix} q^{r(r-1)/2} x^r + \dots + \begin{bmatrix} n+1 \\ n+1 \end{bmatrix} q^{(n+1)n/2} x^{n+1}$$

összefüggést kapjuk, és a két oldalon x egyenlő hatványainak az együtthatóit összehasonlítva azt nyerjük, hogy

$$(3.1) \quad \begin{bmatrix} n+1 \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ r-1 \end{bmatrix} q^{n-r+1}, \quad r = 1, 2, \dots, n.$$

Ez az eredmény könnyen nyerhető közvetlenül az (1.1) definícióból is és a közönséges binomiális együtthatókra vonatkozó

$$(3.1^*) \quad \binom{n+1}{r} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1}$$

összefüggésnek felel meg.

Az (1.2) „kezdeti feltételek”-ből kiindulva és sorra áttérve a (3.1) rekurziós formula alapján egy-egy n értékről a rákövetkezőre, könnyen kiszámíthatjuk a Gauss-féle binomiális együtthatókat. Eközben csak összeadást és szorzást kell ismételten végezni, kivonást és osztást soha. Ezzel azt derítettük ki $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$ -ről, ami az (1.1) definíció alapján q racionális törtfüggvényének látszik, hogy q -nak egy

$$(3.2) \quad \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = A_{n,r,0} + A_{n,r,1} q + \dots + A_{n,r,(n-r)} q^{r(n-r)}$$

alakú polinomja, és az $A_{n,r,\alpha}$ együtthatók pozitív egész számok. (A közönséges binomiális együtthatók is az (1.1*) definíció alapján eredetileg racionális számnak látszanak, de kiderül róluk, pl. (2.9*)-ból, hogy egész számok.) Az, hogy a (3.2) jobb oldalán álló polinom fokszáma $r(n-r)$, adódik pl. az (1.1) jobb oldalán álló kifejezés számlálójában és nevezőjében álló polinomok fokszámának különbségéből, vagy igazolható teljes indukcióval.

E dolgozat fő célja az $A_{n,r,\alpha}$ együtthatók egy szemléletes tulajdonságának a kifejtése.

4. *Egy kombinatorikus értelmezés.* Tekintsünk a síkban egy derékszögű koordináta-rendszert. Azokat a pontokat, amelyeknek mind a két koordinátája egész szám, rádspontoknak szokás nevezni. Gondoljuk ezeket *utcasarok*nak, és az utcasarkokon át a tengelyekkel párhuzamosan futó egyeneseket *utcának*. Képzeljünk egy ebben az úthálózatban sétáló gyalogost (mozgó anyagi pontot). Ebben az úthálózatban egy a $(0, 0)$ és az $((r, n-r))$ sarok közt futó legrövidebb utat (feltesszük, hogy $0 \leq r \leq n$) zegzugos útnak fogunk nevezni; az ilyenek hossza n . Ismeretes,³ hogy a zegzugos utak száma $\binom{n}{r}$. Ezt a következővel fogjuk kiegészíteni:

*Tétel: Az olyan zegzugos utak száma, amelyek alatt α nagyságú terület van, $A_{n,r,\alpha}$.*⁴

Az „út alatti terület”-et az út, a vízszintes $y = 0$ tengely és a függőleges tengellyel párhuzamos $x = r$ egyenes zárja körül.

Az 1. ábra az $n = 6, r = 2$ speciális esetet szemlélteti.

A binomiális együtthatókra vonatkozó állítás szinte csak átfogalmazása a (3.1*) rekurziós egyenlőségnek. A $(2, 4)$ sarokra vagy a $(2, 3)$ vagy az $(1, 4)$ sarokról érkezhetünk zegzugos úton, így az előbbi sarokra vezető utak száma az

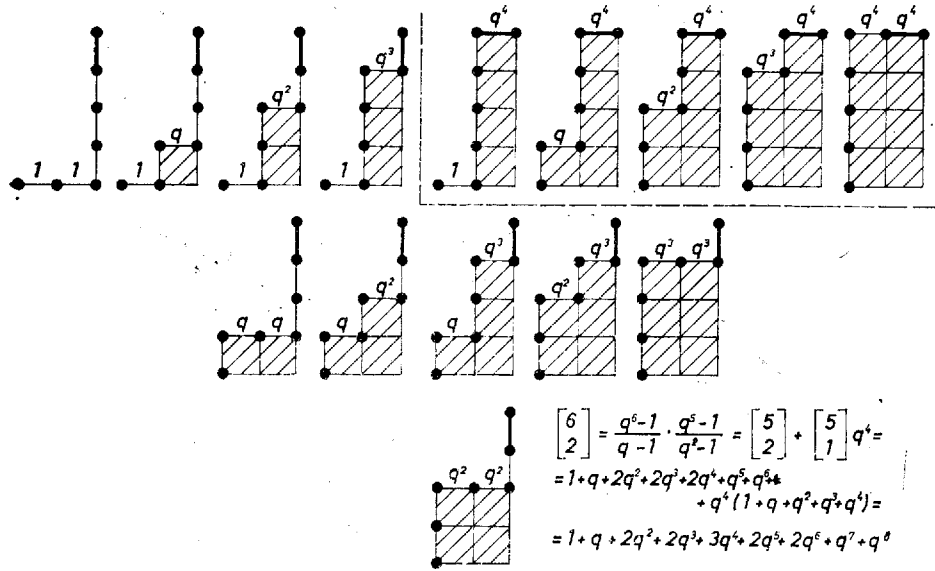
³ Lásd pl. *Pólya György*: A problémamegoldás iskolája I. Tankönyvkiadó, Budapest, 1967. 81–86. old.

⁴ *G. Pólya*, Journ. of Combinatorial Theory 6 (1969) 102–105. old., különösen 105. old.

utóbbi kettőre vezető utak számának az összege. Miután még a függőleges és a vízszintes tengelyen levő $(0, n)$ és $(n, 0)$ sarkok mindegyikére csak egy-egy zezugos út vezet, összhangban az

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

„peremfeltételekkel”, így az egy-egy sarokra vezető zezugos utak száma ugyanazokat a feltételeket elégíti ki, mint a megfelelő binomiális együttható. A kettő tehát megegyezik.



1. ábra

Egész hasonlóan értelmezhetjük a (3.1) rekurziós formulát is. Most minden zezugos úthoz q egy hatványát fogjuk hozzárendelni, és az egy sarokra vezető utakhoz rendelt tagok összege lesz a megfelelő Gauss–binomiális együttható. A $(2, 4)$ sarokra vezető 6 hosszúságú zezugos utakat tekintjük két részből: a $(0, 0)$ sarokról induló 5 egységnyi hosszúságú *kezdő részből* és a $(2, 4)$ sarokra érkező 1 hosszúságú *záró szakaszból* állónak.

A (3.1)-ből esetünkben adódó

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot q^4$$

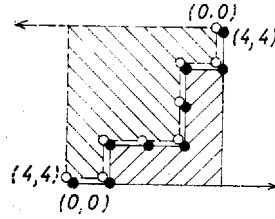
összefüggés jobb oldalának első tagja képviseli a $(2, 3)$ sarokról érkező $\binom{5}{2} = 10$ zezugos út adalékát, tehát azokat, amelyeknek a záró szakasza függőleges, a második tag pedig az $(1, 4)$ sarokról érkező, tehát vízszintes zárószakasszal rendelkező $\binom{5}{1} = 5$ zezugos út adalékát. Az előbbi zezugos utakhoz q -nak ugyanazt a hatványát fogjuk rendelni, mint a kezdő részükhöz, az utóbbiakhoz pedig a kezdő részükhöz rendelt hatvány q^4 -szeresét, vagyis 4-gyel magasabb hatványt.

Ezt úgy is fogalmazhatjuk, hogy a függőleges útszakaszokhoz 1-et rendelünk hozzá, a 4 magasságban futó egységnyi hosszúságú vízszintes szakaszhoz pedig q^4 -t. Általában minden h magasságban futó egységnyi hosszúságú vízszintes útszakaszhoz q^h -t rendelünk, speciálisan a vízszintes tengelyen levő szakaszokhoz $q^0 = 1$ -et. Egy zezugos úthoz ezután az egységnyi szakaszaihoz rendelt értékek szorzatát rendeljük. Így a függőleges és a vízszintes tengelyeken levő $(0, n)$ és $(n, 0)$ sarkokra vezető egyetlen zezugos út minden szakaszához 1-et rendelünk, tehát az egész úthoz is. Ez összhangban van az (1.2) peremfeltétellel. A q hatványainak a vízszintes és függőleges szakaszokhoz történt hozzárendelése is általában összhangban van (3.1)-gyel, mert a jobb oldal első tagja az $(r, n - r)$ sarokról, a második pedig az $(r - 1, n - r + 1)$ sarokról az $(r, n - r + 1)$ sarokra érkező utak adalékát tartalmazza. Az 1. ábrán feltüntettük a vízszintes szakaszokhoz rendelt értékeket. Az elmondottakat jól követhetjük az ábra alapján.

Ezzel tehát beláttuk, hogy az $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$ Gauss–binomiális együttható a $(0, 0)$ sarokról az $(r, n - r)$ sarokra vezető zezugos utakhoz tartozó q -hatványok összege; ennek a hatványnak a kitevője az út vízszintes szakaszaihoz rendelt hatványok kitevőinek összege.

Az egyes szakaszokhoz rendelt kitevő viszont azt mutatja, hogy a szakasz hány egység magasságban van, vagy még másképp fogalmazva: hány egységnyi oldalú négyzet helyezhető el a szakasz és a vízszintes tengely közt. Az egész úthoz rendelt kitevő tehát az út vízszintes szakaszai alatt levő területek összegével, vagyis az egész zezugos út alatti területtel egyezik meg. Így valóban q^α együtthatója az olyan zezugos utak száma, amelyek alatt α terület van, és éppen ezt állítja tételünk.

Tanulságos lesz közvetlenül igazolni néhány olyan összefüggést, ami szoros kapcsolatban van az éppen látott tétellel.



2. ábra

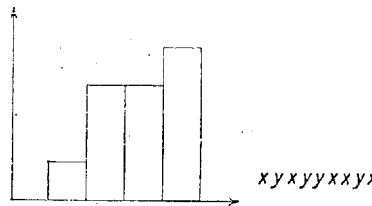
Akár a 2. ábrából, akár az (1.1) kifejezésből világos (ábra a 102. oldalon), hogy

$$(4.1) \quad A_{n,r,\alpha} = A_{n,r,r(n-r)-\alpha}.$$

Mivel továbbá $q = 1$ -nél (1.3) szerint a Gauss-féle binomiális együttható a megfelelő közönséges binomiális együtthatót adja, így (3.2) azt szolgáltatja, hogy

$$(4.2) \quad A_{n,r,0} + A_{n,r,1} + \dots + A_{n,r,(n-r)} = \binom{n}{r}.$$

5. *Egy további kombinatorikus értelmezés.* Egy zezugos út egymáshoz csatlakozó egységnyi szakaszokból áll, amelyek szomszédos utcasarkokat kötnek össze. Ezeket a szakaszokat a $(0, 0)$ pontból indulva sorra x -szel vagy y -nal fogjuk megjelölni aszerint, hogy melyik melyik koordináta-tengellyel párhuzamos. Ezzel egyértelműen egymáshoz rendeltük a zezugos utakat és betűsorozatok egy halmazát; a 2. ábrán mutatott példában a zezugos út az $(5, 4)$ saroknál végződik, és a megfelelő sorozat 9 betűből áll.



3. ábra

Osszuk az $(r, n - r)$ végpontú zezugos út alatti területet az y -tengellyel párhuzamos, egyenlő távolságra következő egyenesekkel r téglalapra, melyek alapja 1 egység, magasságaik (balról jobbra sorolva fel őket)

$$0, 1, 3, 3, 4.$$

Mindegyik téglalap felső oldala a zezugos út egy egységnyi vízszintes szakasza, és így a betűsorozatban egy x -nek felel meg. A téglalap magasságát (egyben az előzőekben a felső vízszintes szakaszához rendelt q -hatvány kitevőjét), és így a területét is, a szóban forgó x -et megelőző y -ok száma adja meg. Ezt úgy is mondhatjuk, hogy a téglalap területe megegyezik a *szóban forgó x alkotta inverziók számával* ebben a betűsorozatban. Akkor mondjuk, hogy a sorozat betűiből kiválasztható $n(n - 1)/2$ pár közül vett valamelyik pár *inverziót* alkot, ha a pár egy x -ből és egy azt megelőző y -ból áll. Az r téglalap együttes területe tehát, vagyis a *zezugos út alatti terület megegyezik a betűsorozatban előforduló inverziók számával* (példánkban ez 11).

A Gauss-féle binomiális együtthatók tehát nemcsak a zezugos utak alatt területeket sorolják fel, hanem *ezzel együtt* az éppen vizsgált betűsorozatokban fellépő inverziók számát is. A Gauss-féle binomiális együtthatóknak ez a kapcsolata ismeretes volt.⁵ Mi itt a területekről az inverziókra történő szemléletes áttérés lehetőségét kívántuk hangsúlyozni.⁶

A probléma megközelíthető egy egészen eltérő úton is. Erre a dolgozat második részében térünk vissza.

Pólya György
Stanford University,
Stanford, Calif., USA

⁵ Lásd pl. *M.G. Kendall–A. Stuart: The advanced Theory of statistics II.* (London 1961) 494. old.

⁶ *G. Pólya: Proceedings of the second Chapel Hill Conference on Combinatorial Math. and its Applications* (1970) 381–384. A 4. és 5. bekezdés nagy részét a szervező bizottság szíves engedelmével e cikkből vettük át.