

Általános tantervű és szakosított matematika–fizika osztályok részére

1. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\sqrt{x^2 - 4x + 3} + \sqrt{-x^2 + 3x - 2} = \sqrt{x^2 - x}.$$

2. a) Legyen M az ABC tetszőleges háromszög ugyancsak tetszőleges belső pontja. Bizonyítsuk be, hogy ekkor

$$t_{BCM} \cdot \overrightarrow{MA} + t_{CAM} \cdot \overrightarrow{MB} + t_{ABM} \cdot \overrightarrow{MC} = 0,$$

ahol t_{BCM} , t_{CAM} és t_{ABM} rendre a BCM , CAM , ill. ABM háromszög területét jelenti.

b) Legyen M az $ABCD$ tetszőleges tetraéder ugyancsak tetszőleges belső pontja. Bizonyítsuk be, hogy ekkor

$$V_{BCDM} \cdot \overrightarrow{MA} + V_{CDAM} \cdot \overrightarrow{MB} + V_{DABM} \cdot \overrightarrow{MC} + V_{ABCM} \cdot \overrightarrow{MD} = 0,$$

ahol V_{BCDM} , V_{CDAM} , V_{DABM} és V_{ABCM} rendre a $BCDM$, $CDAM$, $DABM$, ill. $ABCM$ tetraéder térfogatát jelenti.

3. Bizonyítsuk be, hogy a sakktábla 63 mezője lefedhető 21 darab olyan kartonlemezzel, amelyek mindegyike 3 egymás melletti vagy egymás alatti mezőt tud lefedni. Mely mezők maradhatnak fedetlenül?

A speciális matematikai tantervű osztályok részére

1. Egy automatánál a játék feltételei a következők. Egy zseton bedobására az automata feldob egy játékkockát, amelynek lapjain az 1, 2, ..., 6 számok vannak; a dobás eredménye látható. A dobás után választhatunk: vagy felveszünk nyereményünket, amely annyi forint, amennyi a kockán dobott szám, és a játék véget ér; vagy újabb zsetont dobunk az automatába. Az utóbbi esetben az automata ismét feldobja a kockát és a nyereményünk annyi forint, amennyi a két dobott szám szorzata. Újabb választási lehetőségünk nincs, a játék legkésőbb a második dobás után véget ér. Van-e olyan játékmód, amely mellett a nyeremény várható értéke pozitív, ha a zseton ára 6 Ft 50 f?

2. Határozzuk meg mindazokat az n természetes számokat, amelyekre igaz a következő állítás:

tetszőleges $x_1, x_2, \dots, x_n$ valós számok mellett a

$$p(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i)$$

polinomra teljesül a

$$\sum_{i=1}^n p'(x_i) \geq 0$$

egyenlőtlenség (ahol $p'(x)$ a $p(x)$ polinom deriváltja).

3. A $H_0, H_1, \dots$ halmazzorozatot a következő módon állítjuk elő. Kiindulunk egy tetszőleges 1-nél nagyobb természetes számból. Ez a H_0 egyetlen eleme. Továbbmenve lépésről lépésre definiáljuk a halmazzorozat újabb elemeit. Ha már H_n -et definiáltuk, ennek minden $a \in H_n$ eleméből két új számot képezünk: $(a+1)$ -et és a^2 -et, az így kapott számok lesznek H_{n+1} elemei.

Bizonyítsuk be, hogy a H_k halmaz 2^k ($k = 0, 1, 2, \dots$) különböző elemből áll.

*

A 2. feladat nem különbözik lényegesen a Nemzetközi Matematikai Diákolimpia 1. feladatától (K. M. L. **43.** (1971) 1. old.).

Mind a két esetben az illetékes versenybizottság a következő egyenlőtlenséget általánosította:

„Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges a, b, c, d, e valós számokra érvényes a következő egyenlőtlenség:

$$(a-b)(a-c)(a-d)(a-e) + (b-a)(b-c)(b-d)(b-e) + (c-a)(c-b)(c-d)(c-e) + \\ + (d-a)(d-b)(d-c)(d-e) + (e-a)(e-b)(e-c)(e-d) \geq 0."$$

Az egyenlőtlenség olimpiára javaslása sajnálatos elnézés folytán jött létre. A magyar versenybizottság az esetet 1971. december 7-i levelében a nemzetközi zsüri elnökének tudomására hozta.