

1. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$x^2 + yz = 5 \qquad y^2 + xz = 3 \qquad z^2 + xy = 3.$$

2. Legyen $n \geq 3$ rögzített természetes szám. Bizonyítsuk be az $n = 3$ esetben, hogy

$$\text{ha } 0 < x < \frac{\pi}{2n}, \quad \text{akkor } \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} nx - \operatorname{tg} (n-1)x}{2} > \frac{\operatorname{tg} nx}{n}.$$

3. Az \overline{abcd} tízes rendszerbeli szám jegyeire fennáll, hogy $a > b > c > d$. Ugyanezek a jegyei valamilyen sorrendben az $\overline{abcd} - \overline{dcba}$ különbségnek is. Melyik ez a négyjegyű szám?

4. Adott egy parabola és a belsejében egy pont. Tekintsük a parabolának az adott ponton átmenő húrjait. Mi a mértani helye e hurok felezőpontjainak?

5. Bizonyítsuk be, hogy ha n 3-mal nem osztható egész szám, akkor $n^{13} - n$ osztható $(2^{13} - 2)$ -vel.

6. Az ABC háromszög AB oldala rögzített, a C csúcs pedig úgy mozog, hogy közben a háromszög kerülete változatlan marad. C melyik helyzeténél lesz a C csúcshoz tartozó magasságvonal, súlyvonal és az AB egyenes által bezárt háromszög területe a lehető legnagyobb?

7. Egy sorozat első tagja 2, második tagja 3, további tagjait pedig úgy képezzük, hogy minden egyes tag 1-gyel kisebb legyen, mint a másik két szomszédjának a szorzata. Mennyi a sorozat első 1095 tagjának összege?

8. Jelentse a síkban $P * Q$ annak az egyenlő szárú derékszögű háromszögnek a harmadik csúcsát, amelynek átfogója a PQ szakasz, és a háromszög P , Q , $P * Q$ csúcsai az óramutató járásával ellentétes irányban követik egymást. Bizonyítsuk be, hogy a sík bármely négy A , B , C és D pontjára nézve az $(A * B) * (C * D)$ és az $(A * C) * (B * D)$ ugyanaz a pont.