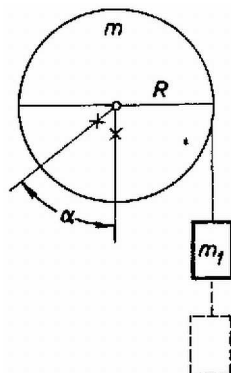


Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat október 17-én rendezte 47. versenyét Budapesten és 7 vidéki városban az idén érettségizettek és a középiskolások részére. A versenyzők 5 óráig dolgozhattak és bármilyen segédeszközt használhattak. Ismertetjük a verseny feladatait, megoldásait és a nyertesek névsorát.

1. Egyenes körhenger fele ezüsből, fele alumíniumból készült, ezért súlypontja az  $R = 10$  cm-es rádiusz középponttól mért negyedében van. A henger tengelyét vízszintesen csapágyazzuk és abban a helyzetben, amikor súlypontja a legmélyebben van, a kerületére csavart fonál végére egy tömeget akasztunk, azután a szerkezetet elengedjük. Mennyi a henger szögsebessége egy teljes fordulat után, ha a lelógó  $m_1$  tömeg

- a henger  $m$  tömegével egyenlő,
- a henger tömegének nyolcada?

**Megoldás.** A henger és a lelógó tömeg helyzetét  $\alpha$  elfordulási szöggel adjuk meg (1. ábra).

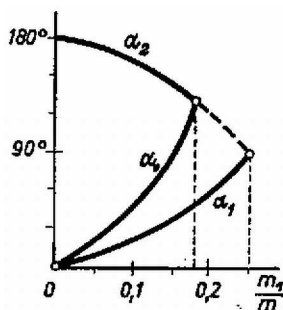


1. ábra

Először keressünk sztatikus egyensúlyi helyzetet, amikor egy bizonyos  $\alpha$  szög mellett a forgatónyomatékok egyenlők. Ennek feltétele:

$$mg \cdot \frac{R}{4} \cdot \sin \alpha = m_1 g R.$$

Ebből az egyensúlyi helyzet feltétele:  $\sin \alpha = 4m_1/m$ . Ilyen sztatikus egyensúlyi helyzet addig van, amíg  $m_1/m \leq 1/4$ . Az  $\alpha_1$  hegyesszöghöz tartozó egyensúlyi helyzet stabilis, az  $\alpha_2$  tompaszöghöz tartozó labilis. Például  $m_1/m = 1/8$  esetében  $\alpha_1 = 30^\circ$ ,  $\alpha_2 = 150^\circ$ . Ha  $m_1/m = 1/4$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 90^\circ$ . A sztatikus egyensúlyi helyzetek szögét a 2. ábra alsó és felső görbéje mutatja az  $m_1/m$  tömegviszony függvényében.



2. ábra

Ha szerkezetünket  $\alpha = 0^\circ$ -os helyzetéből elengedjük, akkor  $\alpha$  szögnyi elfordulás után a lelógó tömeg súlyának munkavégzése  $m_1 g \alpha R$ . Ebből került ki a henger súlypontjának emeléséhez szükséges  $mgR(1 - \cos \alpha)/4$  munkavégzés, a henger  $\Theta \omega^2/2$  mozgási energiája és a lelógó tömeg  $m_1 v^2/2 = m_1 R^2 \omega^2/2$  mozgási energiája. Az energiamegmaradás törvénye szerint:

$$m_1 g \alpha R = \frac{mgR(1 - \cos \alpha)}{4} + \frac{\Theta \omega^2}{2} + \frac{m_1 R^2 \omega^2}{2}.$$

Hengerünk tehetetlenségi nyomatéka egyszerűen  $\Theta = mR^2/2$ , ezért:

$$m_1 g \alpha R = \frac{mgR(1 - \cos \alpha)}{4} + \frac{mR^2 \omega^2}{4} + \frac{m_1 R^2 \omega^2}{2}.$$

Innen a henger szögsebessége, mint  $\alpha$  elfordulási szög függvénye:

$$\omega = \sqrt{\frac{4 \cdot \frac{m_1}{m} \cdot \alpha + \cos \alpha - 1}{2 \cdot \frac{m_1}{m} + 1} \cdot \frac{g}{R}}$$

Az a) kérdésre a felelet: ha  $m_1/m = 1$ , akkor  $\alpha = 2\pi$  mellett  $\omega = \sqrt{8\pi g/3R} = 28,65 \text{ s}^{-1}$

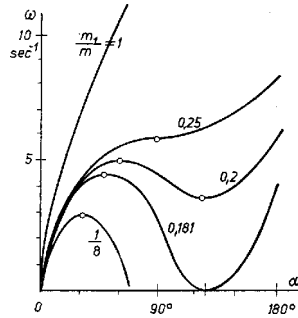
Ha az  $m_1/m$  tömegviszony kisebbedik,  $\omega$  képletében a tört számlálója mindig kisebb lesz és egy bizonyos  $\alpha_0$  szög esetében nulla lesz, ennek feltétele:

$$4 \cdot \frac{m_1}{m} \cdot \alpha_0 + \cos \alpha_0 - 1 = 0.$$

Egyenletünk közelítéssel oldható meg. A 2. ábra középső görbéje tünteti fel a maximális felemelkedés szögének,  $\alpha_0$ -nak az  $m_1/m$  tömegviszonytól való függését.

Vizsgáljuk meg a szerkezet viselkedését különböző  $m_1/m$  tömeghányadoknál, a kisebbektől a nagyobbak felé haladva. Ha  $m_1/m$  elég kicsiny, a henger kezd forogni, a szögsebesség  $\alpha_1$  stabilis egyensúlyi helyzeten áthaladva a legnagyobb, azután lassul és a henger nem éri el  $\alpha_2$  labilis egyensúlyi helyzetet, hanem még előbb visszafordul. Növelve a tömegviszonyt egy bizonyos esetben a henger eléri  $\alpha_2$  felső, labilis egyensúlyi helyzetét, majd ezen át is lendül. A határeset akkor jön létre, ha  $\alpha_0$  egyenlő lesz  $\alpha_2$ -vel. Közelítő számítás mutatja, hogy ez  $m_1/m = 0,181$  tömegviszonynál következik be. Ekkor  $\alpha_0 = \alpha_2 = 133,5^\circ$ .

A felelet b) kérdésre: a henger nem fordul át.



3. ábra

A 3. ábra  $\omega$  szögsebesség  $\alpha$  szögtől való függését mutatja különböző tömegviszonyok esetében. Amíg  $m_1/m$  értéke 0,181 és 0,25 között van, a szögsebességnek minimuma van  $\alpha_2$  helyzetben.

**2. A repülőgép állandó sebességű vízszintes repüléséhez szükséges tolóerő  $F = k_1 A v^2$ . A szárnyfelület által létrehozott emelő erő  $Q = k_2 A v^2$ . ( $Q$  a repülőgép súlya,  $A$  a szárnyfelület nagysága,  $v$  a sebesség.) A szárnyfelület súlya  $k_3 A$ , ehhez járul a teher  $Q_0$  súlya. Mekkora teljesítmény kell a repülőgép mozgásban tartásához? Mikor minimális a teljesítmény? Képes-e az ember izomerejével repülni? Ekkor  $k_1 = 0,001 \text{ kp} \cdot \text{m}^{-2} \cdot (\text{m/s})^{-2}$ ,  $k_2 = 25k_1$ ,  $Q_0 = 100 \text{ kp}$ ,  $k_3 = 2 \text{ kp/m}^2$ .**

**Megoldás.** A teljesítmény az erő és a sebesség szorzata, a repülőgép esetében  $P = Fv = k_1 A v^3$ . De itt az  $A$  szárnyterület és a  $v$  sebesség nem függetlenek egymástól, mert az emelő erőnek a gép  $Q_0 + k_3 A$  súlyával kell egyenlőnek lennie:

$$Q_0 + k_3 A = k_2 A v^2.$$

Ebből kifejezhető a szükséges szárnyterület mint a sebesség függvénye:

$$A = \frac{Q_0/k_2}{v^2 - k_3/k_2}.$$

Ezt felhasználva a teljesítmény kifejezésében, a teljesítményt mint a sebesség függvényét kapjuk meg:

$$P = \frac{k_1 Q_0}{k_2} \cdot \frac{v^3}{v^2 - k_3/k_2}.$$

A sebesség szerint differenciálva keressük a teljesítmény minimumát:

$$\frac{k_2}{k_1 Q_0} \cdot \frac{dP}{dv} = \frac{3v^2(v^2 - k_3/k_2) - 2v^4}{(v^2 - k_3/k_2)^2}.$$

A differenciálhányados eltűnése a minimum szükséges feltétele:

$$3(v^2 - k_3/k_2) - 2v^2 = 0.$$

Az a sebesség, amely mellett a repülés minimális teljesítményű:

$$v = \sqrt{\frac{3k_3}{k_2}}.$$

Ebben az esetben a szárnyfelület területe:

$$A = \frac{Q_0/k_2}{3k_3/k_2 - k_3/k_2} = \frac{Q_0}{2k_3},$$

illetve  $Q_0 = 2k_3A$ , vagyis a minimális teljesítmény esetében a szárny súlya a teher súlyának a fele. A minimális teljesítmény:

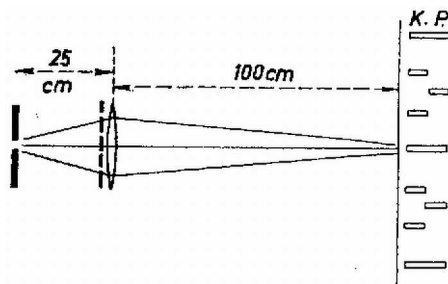
$$P = \frac{k_1}{k_2} \cdot \frac{3Q_0}{2} \sqrt{\frac{3k_3}{k_2}}.$$

A mi adatainkkal a szárny területe  $25 \text{ m}^2$ , az egész repülőgép súlya  $150 \text{ kp}$ , a tolóerő  $6 \text{ kp}$ , a sebesség  $15,49 \text{ m/s} = 55,6 \text{ km/óra}$ , a teljesítmény  $92,9 \text{ mhp/s} = 910 \text{ watt} = 1,24 \text{ LE}$ . Az emberi izomerővel aligha vagyunk képesek repülni. Táblázatunk a teljesítmény minimumának kialakulását mutatja.

| $A$<br>$\text{m}^2$ | $Q$<br>$\text{kp}$ | $v$<br>$\text{m/s}$ | $F$<br>$\text{kp}$ | $P$<br>$\text{mhp/s}$ |
|---------------------|--------------------|---------------------|--------------------|-----------------------|
| 10                  | 120                | 21,9                | 4,8                | 104                   |
| 15                  | 130                | 18,6                | 5,2                | 96,8                  |
| 20                  | 140                | 16,7                | 5,6                | 93,6                  |
| 25                  | 150                | 15,49               | 6,0                | 92,9                  |
| 30                  | 160                | 14,6                | 6,4                | 93,8                  |
| 35                  | 170                | 13,9                | 6,8                | 94,2                  |

**3.**  $0,5 \text{ mm}$  széles rést  $20 \text{ cm}$ -es gyújtótávolságú lencsével a lencsétől  $100 \text{ cm}$ -re levő ernyőre képezünk le olyan fénnel, amely  $0,4 \mu$  hullámhosszúságú kék és  $0,6 \mu$  hullámhosszúságú piros fény keveréke. A lencsére  $0,04 \text{ mm}$  rácsállandójú optikai rácsot helyezünk. Mit látunk az ernyőn?

**Megoldás.** A rés leképezésekor a tárgytávolság  $25 \text{ cm}$ , a képtávolság  $100 \text{ cm}$ , a lineáris nagyítás 4-szeres, és a rés képe  $2 \text{ mm}$  széles sáv (4. ábra).



4. ábra

Ezt a képet a kék és piros fény keveréke alkotja, tehát bíbor színűnek látjuk. Azok az irányok, amelyekben a rács erősítést ad:  $\sin \alpha = n\lambda/d$ , ahol  $\lambda$  a hullámhossz,  $d$  a rácsállandó és  $n$  egész szám. Adatainkkal a kék fény számára  $\sin \alpha = 0,01n$ , a piros fény számára  $\sin \alpha = 0,015n$ . Tekintettel a  $100 \text{ cm}$ -es ernyőtávolságra a kék fény erősítései  $10 \text{ mm}$ -es, a piros fény erősítései  $15 \text{ mm}$ -es távolságokban következnek egymás után. Minden harmadik kék és minden második piros erősítés ugyanarra a helyre. esik és bíbor színt ad.

**A verseny eredménye.** I. díjat nyertek *Blahó Gábor* (a budapesti Eötvös Gimnázium IV. o.-ban Zentai Károly tanítványa) és *Harmat Péter* (a budapesti ELTE-TTK fizikus hallgatója, tavaly a mosonmagyaróvári Kossuth Gimnáziumban Krajnik József tanítványa volt). II. díjat nyertek *Bajmóczy Ervin* IV. o. t. (a budapesti Fazekas Gimnáziumban Hutai Ferenc tanítványa) és *Tichy-Rács Ádám* IV. o. t. (a budapesti Eötvös Gimnáziumban Zentai Károly tanítványa). III. díjat nyert *Mosó Tamás* IV. o. t. (a budapesti Eötvös Gimnáziumban Zentai Károly tanítványa). Dicséretet kaptak: *Füredi Gábor* IV. o. t. (a budapesti Mórész Gimnáziumban Fehér László tanítványa), *Horváthy Péter* (a budapesti ELTE-TTK matematikus hallgatója, tavaly a budapesti Fazekas Gimnáziumban Mihály István tanítványa), *Láz József* (a budapesti ELTE-TTK fizikus hallgatója, tavaly a budapesti Eötvös Gimnáziumban Kellner Dénes tanítványa) és *Sánta Imre* IV. o. t. (a szegedi Radnóti Gimnáziumban Simon Sándor tanítványa).