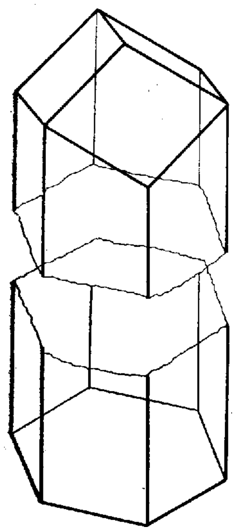
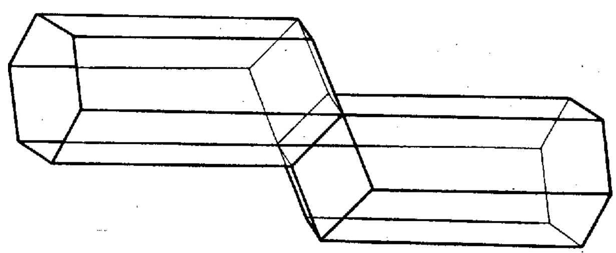
1. Megfigyelve a lépet, melyet a méhek az összegyűjtött méz elraktározása és az ivadékok felnevelése céljára viaszból építenek, azt látjuk, hogy az megközelítőleg egybevágó sejtekből áll. A sejtek alakja szabályos hatszög alapú egyenes hasáb, amelynek egyik alapja hiányzik – ez a bejárati nyílás a másik alapját pedig három egybevágó rombuszból álló zárólap-rendszer helyettesíti (1. ábra).



1. ábra

A sejtek két rétegben helyezkednek el, s az ugyanazon rétegben levő sejtek oldallapjaikkal illeszkednek egymáshoz és bejárati nyílásuk síkja közös, a különböző rétegben levők pedig rombusz alakú zárólapjaikkal (2. ábra). Az illeszkedés hézagmentes, tehát a sejtek lapjai (a lép szélén elhelyezkedő lapok kivételével) két szomszédos sejt közös lapjául szolgálnak. (A sejtek állása a méhkasban a 2. ábra szerinti, a lép határoló síkjai körülbelül függőlegesek; ha viszont a matematikus egyetlen sejtet ragad azt természetesen az 1. ábrán látott módon állítja maga elé.)



2. ábra

A lépsejtek közepes mélysége 11,3 mm, az alap-hatszög élhossza 2,7 mm (esetenként kis eltérések vannak), vagyis a sejtek mélysége kb. 2-szer akkora, mint az alapidom átmérője.

A méheket a takarékosság mintaképének szokás tekinteni, kézenfekvő hát a kérdés, „gazdaságosan” bánnak-e a viasszal a sejtépítésben. Matematikus gondolkodással mindjárt így egyszerűsítenénk a kérdést: mennyi viasz felhasználásával tudnak adott mézmennyiség elraktározásához elegendő sejtet építeni. Más szóval: adott térfogat mellett mekkora a sejt felszíne? Minél kisebb a felszín, annál gazdaságosabb a méz tárolása.

Arra gondolni, hogy egyetlen tartály esetén a gömb a leggazdaságosabb alak erre a problémára, csak azért érdemes, hogy rádöbbenjünk: egészen máshogyan kell hozzányúlnunk a kérdéshez. Hiszen a méhcsaládnak igen nagy számú kicsi sejtre van szüksége, és ösztönük a sejt alakjának, méreteinek kialakításában nyilván más, biológiai, fizikai adottságokhoz is alkalmazkodott. (Pl. a királynő-nevelő sejtek nagyobbak, teherbírás stb.) Az ilyenek elemzése természetesen nem a matematikus dolga, viszont nem volna dialektikus, ha tudomást sem vennénk róluk. Próbáljuk ezért először az adott helyzetet nagyjából megérteni, mielőtt számításba kezdenénk.

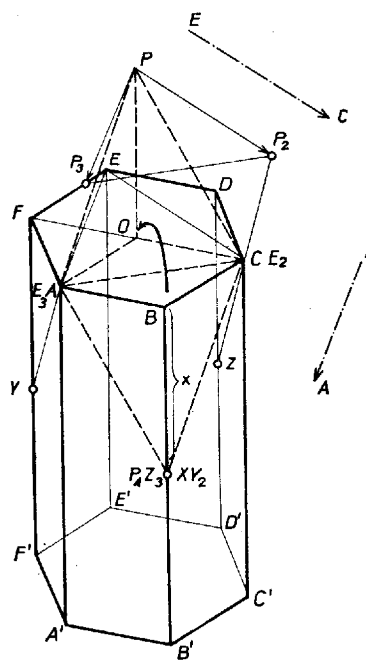
A sejtek egymás közti egybevágóságával (csak a dolgozókat nevelő és méztároló sejtekre gondolva), konvexségével – az ő „nyelvükön” mondva azzal az ösztönös törekvéssel, hogy az építésben minél több egyformaság nyilvánuljon meg –, továbbá a sejtfalak kétoldali kihasználásával megmagyarázható, hogy a falak csak síklapok lehetnek. Hozzávéve, hogy minden sejthez külön bejárat kell, éspedig csak egy, adódik a lép kétrétűsége és a cellák nagyjából hengeres, hasábos, egy fejlődő méh testét éppen befogadó alakja, a párhuzamos határlapok, mert így a sejtek határfelületének a nyílástól legtávolabbi részei – a mondott zárólapok – szintén kétszeresen vannak kihasználva.

Az egyes sejtek szimmetriája, részletezve: lapjainak egybevágósága és a találkozó lapok kölcsönös helyzetének egyformasága is megérthető az építés egyszerűségéből, ezért egyenlők az alapidom oldalai és szögei, ezért derékszögek az alapon levő lap és élszögek. Végül abban, hogy a szabályos sokszögnek kikövetkeztetett alapidomnak éppen hat oldala van, azt látjuk érvényesülni, hogy a síkot egyrétűen és hézagtalanul, egybevágó, szabályos sokszögekkel lefedni csak úgy lehet, ha a sokszög oldalainak száma 3, 4 vagy 6, és e három idom közül rögzített terület esetén éppen a szabályos *hat*szögnek van legkisebb kerülete.

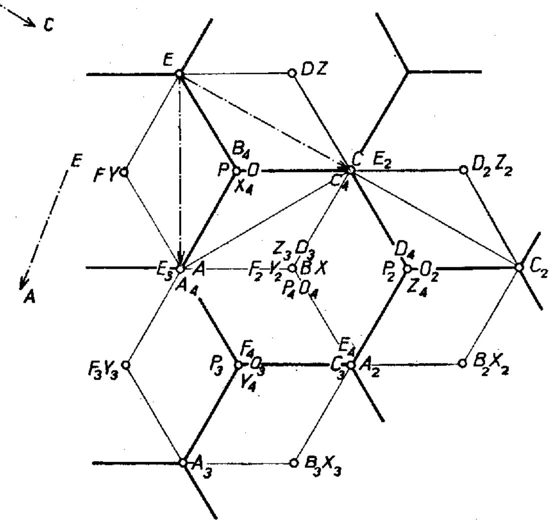
Ezek alapján a továbbiakban adottságnak tekintjük, hogy a lépsejtek szabályos hatszög alapú egyenes hasábok – legalábbis a bemeneti részük ilyen alakú – és figyelmünket a zárólapok alakjára és elhelyezkedésére fordítjuk.

2. Meggondolásaink egy része elemi geometriai jellegű, másrészt alkalmazni fogjuk a differenciálszámítás elemeit is. Eközben egyes részletek bővebb átgondolását az olvasóra hagyjuk.

Tekintsünk egy $ABCDEF$ szabályos hatszög fedőlapú egyenes hasábot (3. ábra).



3. ábra



4. ábra

Alapélét egységnek vesszük, AA' oldalélének hosszúságát a-val jelöljük. Térfogata ekkor $\frac{3\sqrt{3}}{2}a$. Metsszük le hasábunkról az A, C és X pontokon átmenő síkkal az $AXCB$ tetraédert s forgassuk el 180°-kal AC mint tengely körül. Ekkor a B csúcs a hatszög O középpontjába kerül, az X csúcs az O-ban emelt merőleges egy P pontjába s az A, X, C, P pontok egy rombusz csúcsai lesznek. Válasszuk meg ezután Y-t az FF', Z-t a DD' oldalélen úgy, hogy $FY = DZ = BX$, és járjunk el hasonlóan az $EYAF$ és $EZCD$ tetraéderrel. Az elforgatás után F és D megy át O-ba, Y és Z pedig E-be.

Az így keletkezett síklapú testet nevezzük *lépsejtidom*nak. Ennek zárólapjai az $AXCP$, $EYAP$ és $CZEP$ rombuszok, és térfogata megegyezik az eredeti hasábéval. Felszínéről viszont azt sejtjük, hogy kisebb, mint az eredeti hasábé.

Vezessük be a $BX = x$ jelölést és kérdezzük: x mely értéke mellett lesz a lépsejtidom felszíne minimális. (Megjegyezzük, hogy x változtatásával a zárólaprendszer minőségileg nem változik, hacsak $0 < x \leq a$, csupán a rombuszlapok síkjai fordulnak el a végzett forgatások tengelyei körül. Szokásos kifejezéssel: egy szabadsági fokunk van a változtatásra: a zárólapok szögének változtatása.) A felszínt megadó

$$F(x) = 6a - 3x + 3\sqrt{3x^2 + \frac{3}{4}}$$

függvénynek csak ott lehet minimuma, ahol derivált függvénye a 0 értéket veszi fel. Mármost az

$$F'(x) = 3\left(-1 + \frac{3x}{\sqrt{3x^2 + \frac{3}{4}}}\right) = 0$$

egyenlet egyetlen (pozitív) megoldása $x = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Megmutatjuk, hogy $F'(x)$ monoton növekvő (természetesen csak az $x > 0$ értékeket tekintjük). Ugyanis azonos átalakításokkal

$$F'(x) = 3\left(\frac{3}{\sqrt{3 + \frac{3}{4x^2}}} - 1\right),$$

x növekedésével a $\dfrac{3}{4x^2}$ tag és vele az egész nevező csökken, a tört és vele $F'(x)$ is nő. Ámde az $x = 0$ helyen (az eredeti alakból) $F'(0) = -3$, és mint tudjuk, $F'\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right) = 0$, és utána tovább nő, vagyis a $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ helyen $F'(x)$ negatívból pozitívba megy át, és ennek megfelelően $F(x)$ csökkenésből növekedésbe megy át. Így az $x = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ helyen $F(x)$-nek valóban minimuma van, és ott van az egyetlen minimuma, amelynek értéke $F\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right) = 6a + \dfrac{3\sqrt{2}}{2} = 6a + 2{,}1213$ területegység.

3. Most már több érdekeset mondhatunk az optimális (legkisebb felszínű) lépsejtidomról. $x = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ esetén egyszerű számításokkal a rombuszlap oldala $AX = \dfrac{3\sqrt{2}}{4}$ – éppen $3x$ –, átlói $PX = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ és $AC = \sqrt{3}$, ezekből területe $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$, vagyis mértékszámban egyenlő AX-szel, tehát a rombuszlap magassága (szélessége) 1. Ez ismét ugyanannyi, mint a hasáb oldallapjainak szélessége, más szóval X-nek PA-tól és AA'-tól való távolsága egyenlő. (A 3. ábrán jobb áttekintés érdekében x-et jóval nagyobbnak vettük, mint az optimális 0,354 érték.) Ebből és a lépsejtidom (forgási és tükrözési) szimmetriáiból következik, hogy idomunk A (valamint C és E) csúcsánál összefutó 4 él szomszédos párjai közti szögek egyenlők; mindegyik hegyesszög, mert a $PAXC$ lapban $PX < AC$. Továbbá az is következik, hogy $3-3$ egyenlő tompaszög (az előbbiek kiegészítő szöge) fut össze a P, X, Y, Z csúcsokban.

Ezek szerint lehet úgy forgatni az optimális lépsejtidomot egy, az X csúcsán átmenő tengely körül, hogy A a C-be jusson, az XC egyenes az XB' élre és XB' az XA egyenesre (így az AA' él a CP egyenesre fordul rá). Ez – továbbmenve – azt jelenti, hogy a $PAXC$ rombuszlap ugyanakkora szöget zár be az $AXB'A'$ oldallappal, mint ez a CXB' oldallappal, vagyis 120°-ot. Eszerint az optimális lépsejtidom 15 éle mindegyikénél az ott összefutó $2-2$ lap 120°-os szöget zár be egymással.

A mondott forgatást még 2-szer ismételve az XA, XC, XB' élek visszajutnak eredeti helyzetükbe, tehát a forgatás szöge is 120° volt.

Azt is könnyű belátni, hogy lépsejtidomunk egybevágó példányaival hézagtalanul és átfedés nélkül ki lehet tölteni a térnek olyan sávját, melyét két párhuzamos sík határol egymástól $2a$ távolságban. Toljuk el a $PAXCZEYA'B'\dots F' = S$ sejtidomot az $\overrightarrow{EC}$ vektorral az S_2 helyzetbe. $\overrightarrow{EA}$-ral az S_3-ba; a 4. ábrán a határsíkokra merőleges irányból nézve látjuk ezt a helyzetet, minden jelzőbetű 2-es, illetve 3-as indexet kapott az új helyzetben, egyes ilyen pontok már a 3. ábrán is fel vannak tüntetve. Ekkor Y_2E_2 egybeesik XC-vel és Z_3E_3 az XA-val, S_2 és S_3 egy-egy trapézlap mentén hézagtalanul illeszkedik S-hez és egymáshoz, az XB' él mentén a tér ki van töltve. Továbbá az $X \equiv Y_2 \equiv Z_3$ pontban a három sejtidom egy-egy rombuszlapja fut össze tompaszögű csúcsával. Ha tehát S-et elfordítjuk AC mint tengely körül, 180°-kal, az így kapott S_4-nek P_4 csúcsa is X-be jut (továbbá X_4, Y_4Z_4 csúcsa rendre a P-be, P_3 ba, P_2-be) és a tér P_4 körül is ki van töltve. A további kitöltésben természetesen az $\overrightarrow{AC}$-t is bevesszük transzlációs vektornak és az eddigi vektorok (-1)-szereseit is, és ugyanezekkel toljuk el S_4 et is. – Ez a záródás – kitöltés nincs kötve x-nek optimális értékéhez, érvényes bármely $0 < x \leq a$ érték mellett.

Hasznos lesz a továbbiak szemléletének könnyítésére eredményünket az alábbiak szerint is elmondani. A társávot kitöltő sejtidomrendszer úgy keletkezett, hogy először a 3. ábra kiindulási hasábján végeztük el a legutóbb leírt eltolásokat, forgatásokat. Így a társáv hézagtalanul és átfedés nélkül van kitöltve, felezősíkjában az egyik réteg minden egyes lapközéppontjával egybeesik a másik réteg három egymáshoz csatlakozó hasábjának közös csúcsa, például O_4-gyel B, F_2 és D_3, az O-val egybeesők egyike pedig B_4. Továbbá egy alsó és egy felső rétegbeli hasáb véglapjainak közös része egy egységnyi oldalú, 60° szögű rombusz, például $ABCO$, illetve a fölötte levő hasábról $A_4O_4C_4B_4$. Ezután „térrész átcsatolásokat", cseréket hajtottunk végre a két réteg így érintkező hasábtartománypárjai között. Kettévágtuk például a most mondott rombuszt $AC = A_4C_4$ átlója mentén és ezen át levágtuk a két hasábról a $BX = B_4X_4 = x$ magasságú $ACBX$, $A_4C_4B_4X_4$ tetraédereket és hozzácsatoltuk mindegyiket a másik (megcsonkított) hasábtartományhoz. Ugyanezt végeztük minden olyan – egy alsó és egy felső rétegbeli hasábból álló – pár között, melyeknek van közös véglap-része. Így minden hasábról 3 tetraédert csonkítottunk le és 3 másikat csatoltunk hozzá, az utóbbiak egyesítve egy, az $ACEP$-vel egybevágó tetraédert adnak. Minden hasábos tértartomány ugyanannyi térfogatot kapott a másik rétegbeli 3 szomszédjától, mint amennyit azoknak átadott, így a sejtidomtartományok térfogata egyenlő az eredeti hasábtartományokéval, és természetesen a társáv most is hézagtalanul és egyrétűen van kitöltve.

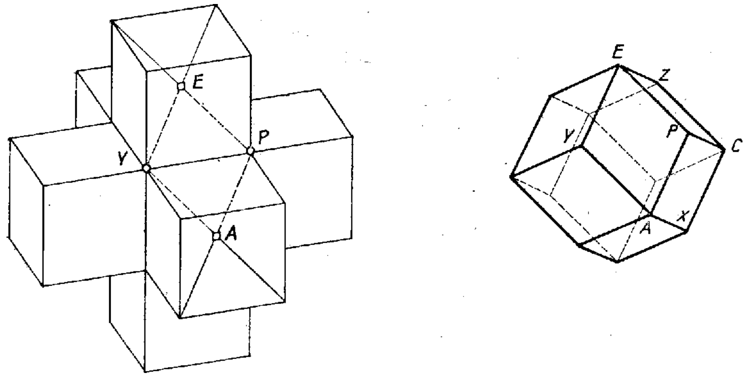
4. Visszatérve most már eredeti kérdésünkhöz, a lépsejtidomunk lapjaiban levő szögekre, $XAP\sphericalangle = XAA'\sphericalangle = \alpha$ jelöléssel az $AX = 3x = 3BX$ észrevételből $\cos\alpha = 1/3$, $\alpha = 70°32'$, ez tehát az optimális lépsejtidomon levő 6 trapéz és 3 rombuszlapnak a hegyesszöge.

Mivel ez a hegyesszög a lépsejtidom alakját egyértelműen meghatározza, elegendő ezt összehasonlítani a valóságos lépsejt megfelelő szögével. A méheknél ezt a hegyesszöget kb. 70°-nak találjuk, ennél pontosabb megmérésnek nem is volna értelme, mivel a puha viaszból kialakított sejtekben az élek és a csúcsok természetesen kissé legömbölyítettek. Így érthető az az igen elterjedt nézet, hogy a méhek sejtjeik zárólapjait a leggazdaságosabb módon építik meg. [1]

[1] Lásd pl. *H. Dörrie:* A diadalmas matematika. Gondolat Kiadó. Budapest, 1965. 384. oldal. – *Móra Ferenc:* A világ így megyen. Szépirodalmi Kiadó. Budapest, 1956. 162–165. oldal.

5. Ezt a vélekedést 1964-ben *Fejes-Tóth László* megcáfolta. [2] Gondolatmenetét a következőkben ismertetjük, előkészítésül azonban egy másik utat mutatunk arra, hogyan lehet eljutni a méhek lépsejtidomához.

Tekintsünk egy kockát, s minden egyes lapjára illesszünk egy vele egybevágó kockát úgy, hogy az illeszkedő lapok egybeessenek (5. ábra bal oldali része), majd vegyük egy konvex síklapú test csúcsaiul az eredeti kocka 8 csúcsát, meg a további 6 kocka középpontját (az ábra jobb oldali része).



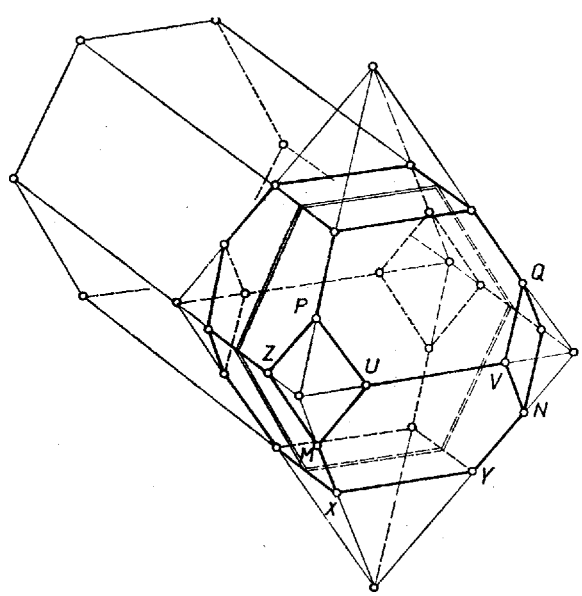
5. ábra

Ezt a testet – mivel 12 (görögül: dodeka) lapja van s ezek mind egybevágó rombuszok – rombdodekaédernek szokás nevezni. Két olyan csúcs, mint az ábrán A és C, két szomszédos kockalapon illeszkedő kockák középpontjai, akkora távolságban van egymástól, mint a kocka egy lapjának átlója – az ábrán például YZ, így a $PAXC$ rombuszlap két átlójának aránya $\sqrt{2}$, akárcsak a méhek rombuszainál a $\sqrt{3} : \frac{\sqrt{6}}{2}$ arány, tehát a rombdodekaéder lapjai hasonlóak a fent talált optimális lépsejtidom rombuszaihoz. További egyezés az 5. és 3. ábrák között, hogy a rombdodekaéderen is az eredeti kockacsúcsokban (mint P) $3-3$ rombusz fut össze a tompaszögével – más szóval a rövidebb átló végpontjával –, a hozzáillesztett kockák középpontjaiban pedig (mint A) $4-4$ rombusz hegyesszöge, hosszabbik átlója találkozik.

Ezek szerint, ha egy $\frac{\sqrt{6}}{2}$ élű kockából kiindulva alkotunk rombdodekaédert, ebből elhagyjuk azt a 3 lapot, amely a kocka P-vel szemben fekvő csúcsában fut össze, a $PAYE$, $PEZC$, $PCXA$ lapokhoz az $AXCZEYA$ „koronavonal" mentén csatlakozó 6 rombuszlapot pedig a csatlakozási éllel szemben levő él távolításával „folytatjuk", akkor éppen az optimális lépsejtidomhoz jutunk. (A lépben a P-ből induló kockaátló fordul vízszintesre.)

Erre támaszkodva *Fejes-Tóth László* felvetette: van-e más olyan síklapú test is, amelynek 6 lapját alkalmas módon folytatva, egyes lapjait viszont elhagyva, szabályos hatszög alapú egyenes hasábot kapunk, egyik végén olyan zárólaprendszerrel, amely alkalmassá teszi arra, hogy – a lépsejtidomhoz hasonlóan ismételve – két rétegben hézagmentesen elhelyezhessük, s emellett a kapott idom felszíne – változatlan térfogat mellett – kisebb, mint a lépsejtidomé.

Fejes-Tóth László leírt egy ilyen testet. Vett két olyan egybevágó szabályos négy oldalú gúlát, amelyeknél az oldallap magassága egyenlő az alapéllel, ezeket alapjaikkal összeillesztette, majd a kapott kettős gúlának – ami a szabályos oktaéderből is előállítható, egyik csúcstengelyével párhuzamos, $\sqrt{3/2} = 1{,}22$ arányú nyújtással – mind a 6 csúcsát „lecsonkította", a szemben levő csúcspárokat összekötő 3 tengelyre merőleges síkokkal (6. ábra).



[2] *L. Fejes Tóth:* What the bees know and what they do not know. Bulletin of the American Mathematical Society, 70 (1964) pp. 468–481. (Magyarul: Mi az, amit tudnak a méhek és mi az, amit nem tudnak.)

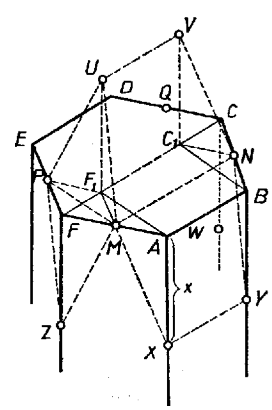
6. ábra

A kiindulási gúlák (négy élű) csúcsait eltávolító síkok félmagasságban metszik a gúlákat, negyedelik a tengelyt, felezik a végpontjaiba befutó $4-4$ élt. A további 4 csúcsot levágó síkok pedig a csúcsoktól számított első nyolcadoló pontjukban metszik az illető (a fő tengelynél rövidebb) tengelyt, vagyis negyedelik az eredeti kettős gúlának az illető csúcsban összefutó éleit, és így a kettős csonka gúla oldaléleit felezik (ugyanis a kettős gúla bármelyik csúcstengelyét véve; a többi 4 csúcs egy síkban van).

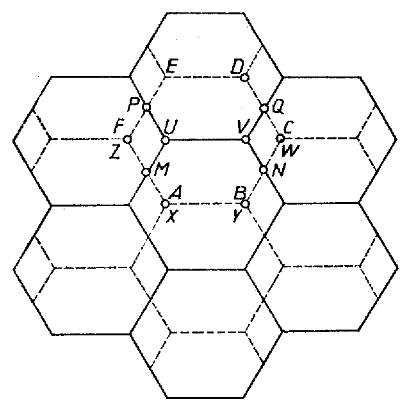
Az így nyert testnek 14 lapja van, páronként párhuzamosak, a test szimmetrikus az összeillesztési síkokra és az egyes gúlák szimmetriasíkjaira (4 sík). Megtartva belőle azt a 4 lapot, amely az egyik összeillesztési alapélen keletkezett U, V negyedelő pontokban fut össze (2 hatszög és 2 rombusz), elhagyva az ezekkel párhuzamos 4 lapot és folytatva a további 6 lapot, előttünk áll a kívánt alak, nevezzük ezt *négyzárólapú sejtidom*nak.

Valóban, idomunk meghosszabbított lapjai egy szabályos hatoldalú hasáb oldallapjai, mert a kettős gúlából bármelyik alapélének σ felező merőleges síkja 60° szögű rombuszt metszett ki, ebből az első két csonkító sík szabályos hatszöget hagy vissza és a meghosszabbított 6 lap mindegyike merőleges σ-ra. (A 14 lapú test tulajdonképpen két egybevágó szabályos hatoldalú hasáb közös része, melyeknek tengelyei merőlegesen metszik egymást és két párhuzamos lappárjuk síkja közös.)

A négyzárólapú sejtidom felszínének és térfogatának megállapításához megmutatjuk, hogy idomunk, a kiindulási gúlák alapélét 2 egységnyinek véve – a háromzárólapú sejtidomnál (3. ábra) látott lemetszésekhez és elforgatásokhoz hasonlóan – előállítható az a magasságú, 1 alapélű szabályos hatoldalú hasábból. Legyen ugyanis M, N, P, Q sorban a hasáb FA, BC, FE, DC fedőélének felezőpontja, továbbá mérjük fel az A-ból, B-ből, F-ből induló oldalélre az $AX=BY=FZ=1/4$ szakaszt (7. ábra, AX nagyítva).



7. ábra



8. ábra

Csonkítsuk le az AB élt az M, N, X (és Y) pontokon átmenő síkkal, az F csúcsot az MPZ síkkal, és forgassuk el 180°-kal a lemetszett $MAXNBY$ ötlapú testet MN mint tengely körül, a $PMFZ$ tetraédert PM körül. Ekkor A és B az FC átló első, illetve harmadik negyedelő pontjába jut, F_1 be, illetve C_1 be, hiszen $FC=2AB=2XY$, az F csúcs ugyancsak F_1 be, másrészt X és Z az F_1 fölött egyesülnek U-ban, ahol $F_1U=AX=1/4$, az Y csúcs pedig a C_1 fölé jut.

Járjunk el hasonlóan a DE éllel, a C csúccsal, és forgassuk el 180°-kal a lemetszett, az előbbiekkel rendre egybevágó testeket PQ, illetve QN körül, így E is F_1-be, D és C is C_1-be jut, a testek új csúcsai pedig U-ba, V-be.

Az így kapott zárólaprendszer két lapja az $MXYNVU$ két szimmetriatengelyű hatszög és az $MZPU$ rombusz, a másik kettő ezek tükörképe, hiszen a rendszer nyilvánvalóan szimmetrikus az FC és AE átlók felező merőleges síkjára nézve. A hatszögben $MN=3/2$ és $XY=XU=1$, a további élek $MX=MU=MZ=\sqrt{5}/4$, végül a rombusz átlói $MP=\sqrt{3}/2$, $ZU=\sqrt{2}/2$ és ugyanezeket az értékeket kapjuk a 6. ábrán látott, előre ugyanígy betűzött test lapjainak méreteire.

Ezek szerint a négyzárólapú sejtidom térfogata annyi, mint a kiindulási hasábé. Zárólaprendszerének és palástjának felszíne

$$2\left[\left(1+2\cdot\frac{1}{8}\right)+\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{8}\right],\quad \text{illetve}\quad 2\left(a-\frac{1}{4}\right)+4\left(a-\frac{1}{8}\right),$$

együttvéve

$$6a+\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{6}}{4}=6a+2{,}1124$$

területegység, kisebb, mint a háromzárólapú sejtidom felszíne (azonos térfogat mellett).

Hátra van még a két párhuzamos sík közti térsáv kitöltésének bizonyítása a négyzárólapú sejtidommal. A korábban végzett térrész-átcsatolási meggondolásunkon az iménti csonkítási és forgatási lépéseinkhez igazodva, csak kis módosítást kell végeznünk: a felső réteget az alsóhoz képest másképpen kell elhelyeznünk, mint az 5. ábra esetében, hiszen az iménti csonkítások és elforgatások lényegében négy átcsatolást, cserét jelentenek. A 7. ábra $MABN$ trapéza MF_1C_1N-be került át, vagyis AB az F_1C_1 be, eszerint az alsó rétegbeli oldalfalak eddigi alaprajzából úgy készül a felső réteg alaprajza, hogy azt az $\frac{\overrightarrow{AE}}{2}$ vektorral toljuk el (8. ábra). Ezáltal a térkitöltés is felveszi a négyzárólapú sejtidom szimmetriáját: 2 tükörsíkrendszere van egymásra merőleges síkállásokkal, szemben a méhek 3 tükörsík állásával.

A *Fejes-Tóth*-féle sejtidom tehát gazdaságosabb az optimális lépsejt idomnál. Mégis, a méhek „mentségére” meg kell jegyeznünk, hogy az utóbbi zárólaprendszer esetében a cella teljes felszíne alig 3,3 %-kel kisebb, mint a méheknél (ugyanis a bevezetőben közölt, mért értékekkel $a = 11{,}3/2{,}7 = 4{,}2$), továbbá hogy a négytagú zárólaprendszer építése bonyolultabb lenne (2-féle lapalak, a lap- és élszögeket nem is számítottuk).

6. Lehet-e tovább javítani a sejtidom négytagú zárólaprendszerének méreteit? Kiderül, hogy a 7. ábra $XA = x$ méretének változtatásával lehet, bár ismét csak kis mértékben. Így az idom felszíne

$$G(x) = 6a - 4x + \frac{1}{4}\sqrt{48x^2+3} + \frac{5}{4}\sqrt{16x^2+3},$$

amiből a fenti vizsgálathoz hasonlóan

$$G'(x) = 4\left(\frac{3x}{\sqrt{48x^2+3}} + \frac{5x}{\sqrt{16x^2+3}} - 1\right) = 4\left(\frac{3}{\sqrt{48+\frac{3}{x^2}}} + \frac{5}{\sqrt{16+\frac{3}{x^2}}} - 1\right),$$

$G'(0) = -4$ és $x > 0$ esetén $G'(x)$ monoton nő, a $G'(x) = 0$ egyenlet gyöke [3] $x = 0{,}279\ldots$, itt $G'(x)$ negatívból pozitívba, maga $G(x)$ pedig csökkenésből növekedésbe vált át, itt van az egyetlen minimum, melynek értéke $G(0{,}279) = 6a + 2{,}1092$, a méhekénél 4,5 %-kel kevesebb.

Nincs bebizonyítva, de valószínű, hogy az így kapott zárólaprendszer (alább új idomnak nevezzük) nem javítható tovább – ti. a zárólapok minőségileg más megválasztásával –, más szóval a felhasznált viaszmennyiség szempontjából ez a leggazdaságosabb zárólaprendszer.

7. Befejezésül nézzük még meg, hogyan alakul három eredményünk, ha – a méhészek ismert módján – műléppel könnyítjük a méhek munkáját, viasztermelés helyett a mézgyűjtés felé irányítva őket. A műlép készen adja a méheknek a zárólaprendszert, kb. 20×30 cm méretű „recézett” lemezként, és ehhez csak az oldalfalakat kell megépíteniük. Mennyiségben ez még mindig a nagyobb része a munkának, de egyúttal bizonyára az egyszerűbb része is. Táblázatunkban az említett $a = 4{,}2$ érték alapulvételével felírtuk a sejt összfelszínét (a bemeneti nyílás nélkül) és ennek megoszlását zárólaprendszerre és oldalfalakra. Így a megépítendő palástfelszín tekintetében a méhek a rangsor középső helyét foglalják el, az új idom a legjobb, mert x-nek 0,25-ről 0,279-re emelésével a zárólapok meredekebbek, felszínük nő, tehát nagyobb a felszínnek műléppel előkészíthető része.

	1 sejt összfelszíne	Zárólaprendszer felszíne	Palást felszíne
Méhek:	27,2324	3,1820	24,0504
Négyzárólapú idom:	27,2235	3,1124	24,1111
Új-idom:	27,2203	3,2260	23,9943

Érdekes geometriai-biológiai kísérlet lenne a méheknek *Fejes-Tóth*-féle vagy új idomú műlépeket bekészíteni, vajon hogyan csatlakoztatnák a hatoldalú palástokat a 10 tagú koronavonalhoz.

Csákány Béla [4]

[3] A $G'(x) = 0$ egyenletből a gyökmennyiségeket a szokásos módon eltüntetve negyedfokú egyenletet kellene megoldanunk. Emiatt célszerűbb közelítő eljárást alkalmaznunk a következő módon. Észrevesszük, hogy $G'(0) < 0$, $G'(1) > 0$; így 0 és 1 között a $G'(x) = 0$ egyenletnek van megoldása. Továbbá $G'\left(\frac{1}{2}\right) > 0$, így 0 és $\frac{1}{2}$ között van megoldás. Ezt a eljárást folytatva, az n-edik lépésben a megoldást $\frac{1}{2^{n-1}}$ hosszúságú intervallumba szoríthatjuk. Így nyertük az $x = 0{,}279\ldots$ értéket.

[4] Köszönetet mondok a Szerkesztőség tagjainak: *Bakos Tibor*nak, volt tanáromnak, e cikk elkészítéséhez nyújtott önzetlen segítségéért és *Matavovszky Tibor*nak értékes megjegyzéséért. *A szerző.*