

Első feladat. Legfeljebb hány hegyesszöge lehet egy (önmagát nem metsző) síkbeli n -szögnek?

Megoldás. Jelölje k a sokszög hegyesszögeinek számát. Mivel minden hegyesszög kisebb, mint 90° , a hegyesszögek összege kisebb, mint $k \cdot 90^\circ$. A többi $n - k$ szögről csak annyit tudunk, hogy kisebbek, mint 360° , így összegük kisebb, mint $(n - k) \cdot 360^\circ$. Így az n -szög szögösszege kisebb, mint

$$k \cdot 90^\circ + (n - k) \cdot 360^\circ = n \cdot 360^\circ - k \cdot 270^\circ.$$

Másrészről azonban az n -szög szögeinek összege $(n - 2) \cdot 180^\circ$, tehát

$$(n - 2) \cdot 180^\circ < n \cdot 360^\circ - k \cdot 270^\circ,$$

ahonnan rendezés és 90° -kal való osztás után

$$3k \leq 2n + 4$$

adódik. Mivel mindkét oldalon egész szám áll,

$$3k \leq 2n + 3,$$

és így

$$k \leq \frac{2n}{3} + 1.$$

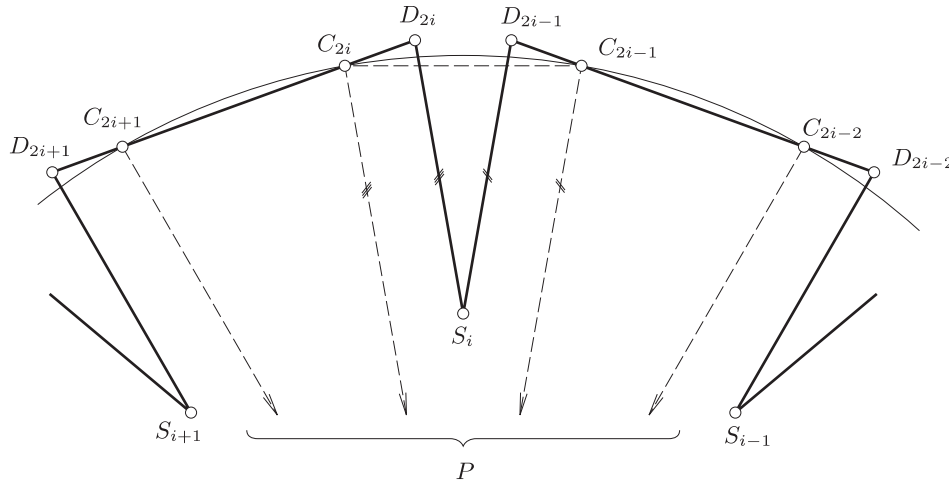
Így azt kaptuk, hogy egy síkbeli n -szögnek legfeljebb

$$\left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor + 1$$

hegyesszöge lehet (a szögletes zárójel, mint szokásos, a szám egész részét jelöli).

Hozzá tartozik még a feladathoz annak megmutatása, hogy ez a korlát el is érhető; más szóval, olyan n -szöget kell konstruálnunk, melyben a hegyesszögek száma pontosan $\left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor + 1$.

Foglalkozunk először azzal az esettel, amikor n 3-mal osztható, vagyis $n = 3r$. Ekkor $\left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor + 1 = 2r + 1$.

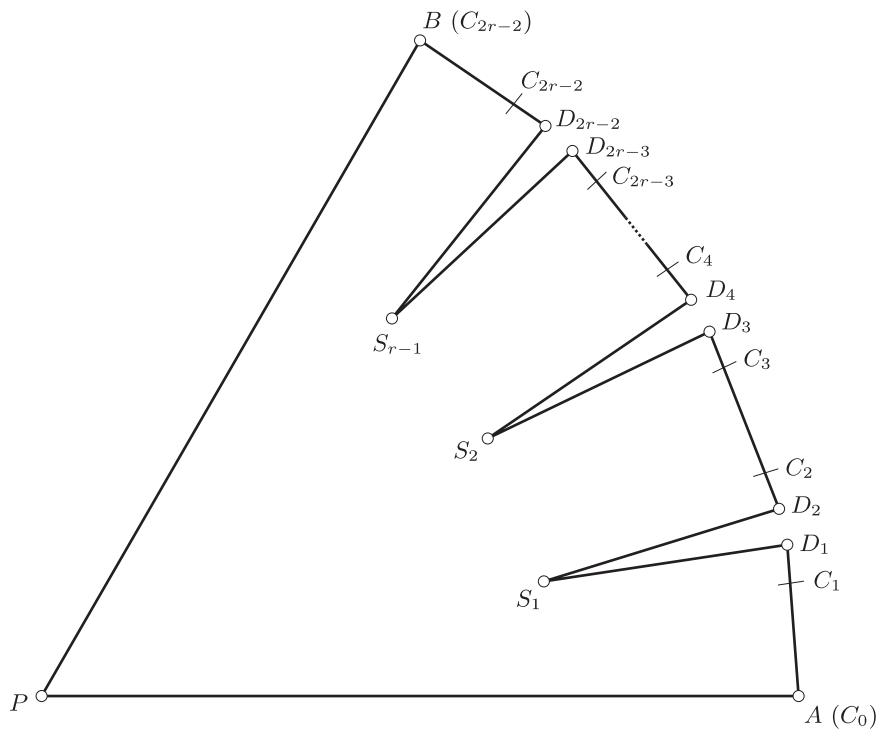


1. ábra

Tekintsünk egy 60° -os körcikket, legyen a körív két végpontja A és B , a körcikk csúcsa P , és osszuk az AB ívet a $C_1, C_2, \dots, C_{2r-2}$ pontokkal $2r - 1$ egyenlő részre. Jelölje S_i a $C_{2i-1}PC_{2i}$ háromszög súlypontját ($i = 1, \dots, r - 1$). Húzzunk S_i -n át párhuzamost PC_{2i-1} -gyel, és mossa ez a $C_{2i-2}C_{2i-1}$ egyenest D_{2i-1} -ben, C_0 -on A -t értve. Hasonlóképpen legyen D_{2i} a PC_{2i} -vel párhuzamos, S_i -n áthaladó egyenesnek és $C_{2i}C_{2i+1}$ -nek metszéspontja, C_{2r-1} -en B -t értve (1. ábra). Tekintsük mármost a következő sokszöget:

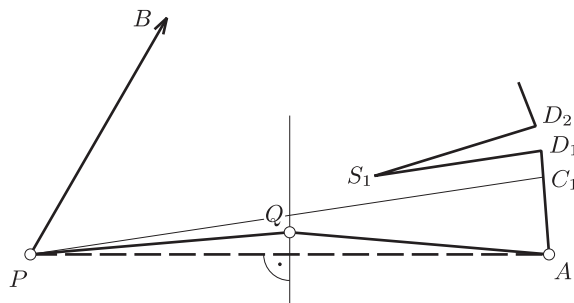
$$\Sigma = PAD_1S_1D_2D_3S_2D_4 \dots D_{2i-1}S_iD_{2i}D_{2i+1}S_{i+1} \dots D_{2r-3}S_{r-1}D_{2r-2}BP$$

(2. ábra). Ennek nyilván $3r$ csúcsa van és $2r + 1$ hegyesszöge a $P, A, D_1, D_2, \dots, D_{2r-2}, B$ csúcsok mindegyikénél hegyesszöge van. Ugyanis az APB szög 60° , a PAD_1 szög a PAC_1 egyenlő szárú háromszög alapján fekvő szögek egyike, tehát hegyesszög, az AD_1S_1 szög pedig ezzel egyenlő, hiszen AD_1S_1 és AC_1P párhuzamos szárú szögek. A többi felsorolt szögről hasonlóan látható be, hogy hegyesszögek.



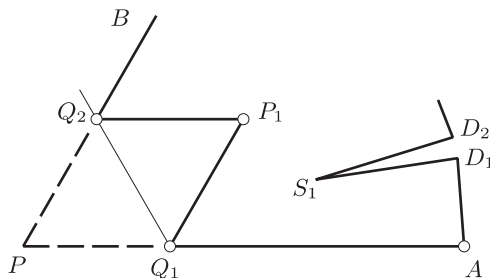
2. ábra

Másodszor azzal az esettel foglalkozunk, amikor n 3-mal osztva 1-et ad maradékul, vagyis $n = 3r + 1$. Ekkor $\left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor + 1 = 2r + 1$. Az előzőek szerint tudunk olyan $3r$ -szöget szerkeszteni, melynek $2r + 1$ hegyesszöge van. Tekintsük az előzőekben megszerkesztett Σ sokszöget, és az AP oldal felező merőlegesén válasszunk egy olyan Q pontot, mely benne van a PAC_1 háromszögben. Ekkor $\angle QAC_1 < \angle PAC_1$ és $\angle QPB < \angle APB$, tehát hegyesszögek, így a Σ sokszög AP oldalát az AQP töröttvonallal helyettesítve olyan Σ' $(3r + 1)$ -szöget kapunk, melyben $2r + 1$ hegyesszög van (3. ábra).



3. ábra

Végül tekintsük az $n = 3r + 2$ esetet. Tekintsük ismét a $3r$ csúcsú Σ sokszöget. Legyen PA , ill. PB (P -hez közelebbi) harmadolópontja Q_1 , ill. Q_2 , és P -nek Q_1Q_2 -re való tükörképe P_1 . Ekkor a Σ sokszög AP , PB oldalait az $AQ_1P_1Q_2B$ töröttvonallal helyettesítve olyan Σ'' sokszöget kapunk, melynek $3r + 2$ csúcsa és $2r + 2 = \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor + 1$ hegyesszöge van, hiszen a P helyett fellépő három csúcs közül kettőben, Q_1 -ben és Q_2 -ben 60° -os, vagyis hegyesszög van (4. ábra).



4. ábra

Megjegyzések. 1. Az olvasóra bízunk annak belátását, hogy a Σ , Σ' , Σ'' sokszögek nem metszik át önmagukat.

2. Számos más módon is konstruálható n szögpontú, $\left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor + 1$ hegyesszöggel rendelkező sokszög. Több versenyző teljes indukcióval definiálta ezeket, n -ről $n + 3$ -ra lépve (ekkor $n = 3, 4, 5$ esetére meg kell adni egy-egy példát, ami nyilvánvaló). A legtöbb megoldásban Σ a fentihez hasonlóan volt megalkotva, de belőle Σ' -t és Σ'' -t már igen sok különböző módon készítették el a versenyzők.

3. Több versenyző megjegyezte, hogy ha csak konvex sokszögekre szorítkoznánk, a hegyesszögek maximális száma 3 volna.

Második feladat. *Mi a valószínűsége annak, hogy egy lottóhúzás öt száma között van legalább két szomszédos (amelyek különbsége 1)?*

I. Megoldás. Jelölje p a kérdezett valószínűséget, k pedig az első 90 számból kiválasztható azon számötösök számát, melyekben nincsen két szomszédos. Mivel az összes lehetséges lottóhúzások száma $\binom{90}{5}$, azért

$$p = 1 - \frac{k}{\binom{90}{5}},$$

így tulajdonképpen a k szám meghatározása a feladat.

Tekintsünk egy olyan

$$1 \leq a < b < c < d < e \leq 90$$

számötöst, melyben nincs két szomszédos szám. Ekkor az

$$a, \quad b-1, \quad c-2, \quad d-3, \quad e-4$$

számötös számai különbözők, és 1 és 86 közé esnek. Megfordítva, minden

$$1 \leq a' < b' < c' < d' < e' \leq 86$$

számötös esetén

$$a', \quad b'+1, \quad c'+2, \quad d'+3, \quad e'+4$$

olyan számötös, melynek mindegyik eleme 1 és 90 közé esik, és nem tartalmaz szomszédos számokat. Így k egyenlő az első 86 számból kiválasztható számötösök számával, vagyis

$$k = \binom{86}{5}.$$

Innen

$$p = 1 - \frac{\binom{86}{5}}{\binom{90}{5}} = 1 - \frac{86 \cdot 85 \cdot 84 \cdot 83 \cdot 82}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86} = 0,2 \dots$$

II. Megoldás. Az előző megoldásban talált k számot más ötlettel is meghatározhatjuk. Tekintsünk egy sorban 90 egyforma golyót, egy kicsit ferde vályúban és emeljük ki az a -adikat, b -ediket, c -ediket, d -ediket és e -ediket, ahol a, b, c, d, e egy olyan lottószámötös, amely nem tartalmaz szomszédos egészeket. A visszamaradó golyók összegurulnak, és egy 85 golyóból álló láncot alkotnak. k mármint annak számát jelenti, ahányféleképpen 5 nem szomszédos golyót a 90-ből ki lehet emelni; vagyis, megfordítva, ahányféleképpen a 85 golyóból álló láncba 5 golyót be tudunk iktatni úgy, hogy ne legyen közöttük két szomszédos. Egy ilyen „beiktatást” azzal jellemezhetünk, hogy megmondjuk, a lánc 86 „golyóköze” közül melyik 5-öt választjuk ki (a lánc eleje és vége is „köz”-nek számít, ezért 86 a számuk). Vagyis

$$k = \binom{86}{5}.$$

Megjegyzések. 1. Ha n számból m -et húzunk, akkor annak a valószínűsége, hogy a kihúzott számok között van legalább két szomszédos:

$$1 - \frac{\binom{n-m+1}{m}}{\binom{n}{m}}.$$

2. Az első megoldás gondolatmenete segítségével az is belátható (ez az általánosítás *Ruzsa Imre* dolgozatában szerepelt), hogy ha megadunk $c_1, c_2, \dots, c_{m-1}$ természetes számokat, akkor annak a valószínűsége, hogy az első n természetes számból kihúzott $1 \leq a_1 < \dots < a_m \leq n$ szám- m -esre

$$a_2 - a_1 > c_1, \quad a_3 - a_2 > c_2, \quad \dots, \quad a_m - a_{m-1} > c_{m-1}$$

álljon fenn, éppen

$$\frac{\binom{n - c_1 - c_2 - \dots - c_{m-1}}{m}}{\binom{n}{m}}.$$

Ennek belátásához azt jegyezzük meg, hogy ha $(a_1, \dots, a_m)$ ilyen szám- m -es, akkor

$$1 \leq a_1 < a_2 - c_1 < a_3 - c_1 - c_2 < \dots < a_m - c_1 - c_2 - \dots - c_{m-1} \leq n - c_1 - \dots - c_{m-1},$$

és viszont.

3. A magyar lottóhúzások 1957-től 1971. március végéig lefolyt 738 húzása közül 146-ban fordult elő a vizsgált számszomszédosság, éspedig a számötösöket növekvően rendezve az 1. és 2. helyen álló számok között 39 esetben, a további szomszédos helyek között rendre 27, 41, 39 esetben.

Harmadik feladat. Adva van n pont, amelyek közül semelyik három sincs egy egyenesen. Az általuk meghatározott szakaszok közül néhányat pirossal, néhányat kézzel rajzoltunk be úgy, hogy a megszínezett szakaszok mentén haladva bármelyik pontból bármelyik pontba el lehessen jutni, de csak egyféleképpen. Bizonyítandó, hogy a pontok által meghatározott, még meg nem színezett szakaszok kifesthetők kékre vagy pirosra úgy, hogy az adott pontok által meghatározott bármelyik háromszög oldalai között páratlan számú piros legyen.

I. Megoldás. Megadunk egy utasítást arra, hogyan kell a még nem színezett szakaszokat színezni. Legyen AB egy olyan szakasz, amelynek végpontjai az adott pontok közül valók és amely még nincs kiszínezve. A feltétel szerint létezik egy és csakis egy olyan törött vonal, mely eredetileg színezett szakaszokból áll és A -t B -vel köti össze. Jelölje V_{AB} ezt a törött vonalat. Legyen mármost az AB szakasz

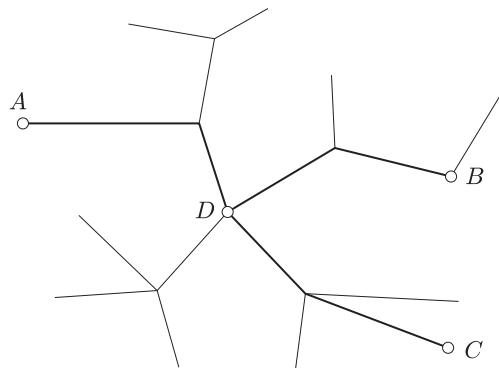
kék, ha V_{AB} páratlan sok kék szakaszt tartalmaz és legyen

piros, ha V_{AB} páros sok kék szakaszt tartalmaz.

(Megjegyezzük, hogy ez a „színezési szabály” akkor is érvényes, ha AB már eleve is színezett volt.)

Megmutatjuk, hogy a fenti „színezési szabály” kielégíti a feladat követelményeit. Legyen e célból ABC tetszőleges háromszög, melynek csúcsai az adott pontok közül valók.

Először is megadható olyan D pont, melyből az A -ba, B -be, C -be vezető, eredetileg színezett szakaszokból álló V_{DA} , V_{DB} , V_{DC} utaknak nincsen D -től különböző közös pontjuk (megengedjük itt, hogy D egybeessen pl. A -val, ekkor V_{DA} egyetlen pontból áll). Tekintsük ugyanis az A -t B -vel összekötő, eredetileg színezett szakaszokból álló V_{AB} utat. C -ből A felé elindulva a V_{CA} úton, előbb-utóbb elérjük a V_{AB} út valamely D pontját (ha C rajta fekszik a V_{AB} úton, akkor $D = C$; természetesen az is előfordulhat, hogy $D = A$ vagy $D = B$). Könnyen látható, hogy az így megszerkesztett D pont a fenti kikötésnek eleget tesz (5. ábra).



5. ábra

Mármost a fenti színezési szabály szerint, az AB , BC , AC szakaszok között rendre annyi kék van, ahány páratlan szám előfordul az

$x = a$ V_{DA} és V_{DB} utakon fekvő kék szakaszok száma,

$y = a$ V_{DB} és V_{DC} utakon fekvő kék szakaszok száma és

$z = a$ V_{DC} és V_{DA} utakon fekvő kék szakaszok száma között.

Mivel $x + y + z$ páros (hiszen V_{DA}, V_{DB}, V_{DC} utak minden kék szakasza kétszer van beszámítva ebbe az összegbe), az ABC háromszögnek valóban páros sok kék oldala van.

II. Megoldás. Válasszunk ki egy tetszőleges A_0 pontot és színezzük ki sárgára. Ezek után a többi pontot is kiszínezzük sárgával és zölddel a következőképpen: egy A_0 -ból kiinduló, eredetileg is színezett szakaszokból álló törött vonal mentén haladva, az i -edik pont legyen az $(i - 1)$ -edikkel azonos színű, ha a kettőt összekötő szakasz piros, és különböző színű, ha az összekötő él kék. Mivel a feltétel szerint bármely pontba egy és csakis egyféleképpen juthatunk el ilyen törött vonalon, azért minden pont színe egyértelműen meg van határozva.

Ezek után a következő „színezési szabályt” adhatjuk meg: az AB él legyen

piros, ha A, B mindegyike zöld vagy mindegyike sárga, és legyen
kék, ha A, B különböző színűek.

Megállapíthatjuk, hogy az eredetileg megszínezett szakaszok e „színezési szabálynak” megfelelően vannak színezve.

Tekintsünk mármost egy tetszőleges ABC háromszöget, melynek csúcsai az adott pontok közül valók. Ha A, B, C azonos színűek, akkor az AB, BC, AC szakaszok mindegyike piros. Ha, mondjuk A és B azonos és C tőlük különböző színű, akkor AB piros, AC és BC kék. A piros szakaszok száma tehát vagy 3 vagy 1, mindenképpen páratlan. Tehát a megadott „színezési szabály” a feladat kikötésének eleget tesz.

Megjegyzések. 1. Több dolgozat a pontok száma szerinti teljes indukcióval igazolta az állítást.

2. Megmutatható – erre több versenyző utalt is –, hogy a szakaszoknak a feladatbeli színezése egyértelmű. Legyen ugyanis AB tetszőleges szakasz. A feltétel szerint A és B összeköthető egy, eleve színezett élekből álló

$$\overline{A_0 A_1 \dots A_n} \quad (A_0 = A, \quad A_n = B)$$

törött vonallal. Mármost az $A_0 A_1 A_2$ háromszögben páratlan sok piros élnek kell lennie, ez meghatározza az $A_0 A_2$ szakasz színét. Így az $A_0 A_2 A_3$ háromszögben már két szakasz színe adott, ez meghatározza az $A_0 A_3$ szakasz színét. Hasonlóan továbbmenve láthatjuk, hogy az AB szakasz színe is egyértelműen meg van határozva.

3. Elegendő volna a feladatban annyit feltenni, hogy bármely két pont *legfeljebb* egyféleképpen köthető össze eredetileg is megszínezett szakaszokból álló törött vonallal. Ilyenkor ugyanis (mint az könnyen igazolható) meg lehet még néhány további szakaszt színezni úgy, hogy a kapott szakaszokra már a feladat feltétele teljesüljön.