

Az 1572. feladatban¹ tetszés szerinti n páratlan oldalszám esetére nem döntöttük el, hogy a bélyegzővel előállított bővös kövezet pándiagonális, azaz minden átlójában bővös-e, vagy csak némely átlóiban, vagy hogy egyáltalán lehet-e a kövezetben bővös négyzetet kijelölni a keret alkalmas elhelyezésével. Ezt és az ottani egyéb kérdéseket is más eljárással újra vizsgáljuk.

1. Valamivel kényelmesebb, ha a szokásos $1, 2, \dots, n^2$ számok helyett az 1-gyel kisebb $0, 1, \dots, (n^2 - 1)$ számokat írjuk be bélyegzőnkre, mert ezek az n -alapú számrendszernek éppen az összes kétjegyű számai:

$$\overline{ab} = an + b,$$

ahol a -ra, b -re egyformán

$$(1) \quad 0 \leq a, b \leq n - 1.$$

Pl. az 1572. feladat 1. ábráján az 1-estől jobbra fölfelé haladó bejegyzések helyére rendre ezek lépnek:

$$\overline{00}, \overline{01}, \overline{02}, \dots, \overline{0, n-2}, \overline{0, n-1}.$$

2. Helyezzünk a lenyomatok papirosára szokásos koordináta-rendszert, origójának a $\overline{00}$ szám első lenyomatbeli példányát, tengelyirányoknak a sorok, ill. oszlopok irányát, hosszúságegységnek pedig egy kis mező oldalát véve. Legyen még a jobbra és a fölfelé mutató egységvektor $\mathbf{i}$, ill. $\mathbf{j}$, ekkor az előbbi számoknak (pontosabban az őket tartalmazó mezők középpontjainak) helyvektorai rendre

$$\mathbf{0}, \quad 2\mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad 2(2\mathbf{i} + \mathbf{j}), \quad \dots, \quad (n-1)(2\mathbf{i} + \mathbf{j}),$$

a $\overline{00}$ -ból induló, jobbra lejtő bejegyzéseké

$$\mathbf{0}, \quad 2\mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad 2(2\mathbf{i} + \mathbf{j}), \quad \dots, \quad (n-1)(2\mathbf{i} + \mathbf{j}),$$

általában az $\overline{ab}$ szám első lenyomatbeli példányának helyvektora

$$a(2\mathbf{i} - \mathbf{j}) + b(2\mathbf{i} + \mathbf{j}) = 2(a+b)\mathbf{i} - (a-b)\mathbf{j},$$

és ezen szám minden további lenyomatbeli példányának helyvektora

$$(2) \quad (2a + 2b + g_1n)\mathbf{i} + (-a + b + g_2n)\mathbf{j}$$

alakú, ahol g_1, g_2 egészek (úgyisintén a tovább bevezetendő g_i ($i = 3, 4, \dots$) számok is). Mindezen alakok az összegek szempontjából ekvivalensek. Azt az alakot, amelyben a (2)-beli két koordináta 0 és $n-1$ közé esik (a korlátokat beleértve), az $\overline{ab}$ szám redukált helyvektorának nevezzük.

3. Megmutatjuk, hogy a lenyomatok előírt megismétléseivel sohasem áll elő két szám átfedése, más kifejezéssel: az $\overline{ab}$ és $\overline{cd}$ számok redukált helyvektora csak akkor egyező, ha $a = c$ és $b = d$.

Az egyezés feltétele a vektorok végpontjaihoz tartozó koordináták egyenlősége:

$$\begin{aligned} 2a + 2b + g_1n &= 2c + 2d + g_3n, \\ -a + b + g_2n &= -c + d + g_4n, \end{aligned}$$

és ha ez teljesül, akkor

$$(3) \quad \begin{aligned} 2(a-c) + 2(b-d) &= (g_3 - g_1)n = g_5n, \\ -(a-c) + (b-d) &= (g_4 - g_2)n = g_6n. \end{aligned}$$

Mivel n páratlan, azért g_5 páros, $g_5 = 2g_7$, és így az elsőből

$$(4) \quad (a-c) + (b-d) = g_7n,$$

amit (3)-hoz hozzáadva és a legutóbbi meggondolást megismételve

$$\begin{aligned} 2(b-d) &= (g_6 + g_7)n = 2g_8n, \\ b-d &= g_8n. \end{aligned}$$

Ámde két számjegyük különbségére

$$-(n-1) \leq b-d \leq n-1,$$

¹Lásd ezen számban, 103. o.

és e korlátok közt n -nek egyetlen többszöröse 0, így $b = d$. – Ugyanígy adódik (3)-ból és (4)-ből kivonással $a = c$, amint állítottuk.

4. A bélyegző által előállított kövezetben sorok, oszlopok, jobbra lejtő vagy emelkedő átlók (röviden fő-, ill. mellékátló) mentén összekerülő számok kapcsolatának meghatározása céljára kérdezzük általánosan: mely szám áll egy $\overline{cd}$ számból (pontosabban mezejének középpontjából) kiinduló $x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ vektor végpontjában, ahol $0 \leq x, y \leq n-1$. Az eredményt $(x, y) = (1; 0)$ -ra, majd $(\mathbf{x}, 0)$ -ra alkalmazva a $\overline{cd}$ -től jobbra az x -edik (más szóval balra az $n-x$ -edik) mezőn álló számot fogjuk kapni; hasonlóan $(0; 1)$ és $(0; y)$ esetén a vele egy oszlopban álló számokat, (x, x) és $(x, n-x)$ esetén pedig a vele egy-egy átlós vonalon állókat, hiszen $(x, n-x)$ ekvivalens $(x, -x)$ -szel.

A keresett számot $\overline{ab}$ -vel jelölve, $\overline{ab}$ és $\overline{cd}$ alkalmas lenyomataihoz tartozó helyvektorok különbségére fennáll

$$\{(2a + 2b + g_1n)\mathbf{i} + (-a + b + g_2n)\mathbf{j}\} - \{(2c + 2d + g_3n)\mathbf{i} + (-c + d + g_4n)\mathbf{j}\} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j},$$

vagy rövidítésül bevezetve az $a - c = a^*$, $b - d = b^*$ jelöléseket:

$$(2a^* + 2b^* + g_5n)\mathbf{i} + (-a^* + b^* + g_6n)\mathbf{j} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j},$$

amiből a^* -ra és b^* -ra az alábbi egyenletrendszert kapjuk. (Megjegyezzük, hogy itt $-(n-1) \leq a^*, b^* \leq (n-1)$ hiszen $a < c$ és $b < d$ is lehetséges, továbbá, hogy a^* -on, b^* -on felül tulajdonképpen a g számok is ismeretlenek.)

$$\begin{aligned} 2a^* + 2b^* + g_5n &= x, \\ -a^* + b^* + g_6n &= y. \end{aligned}$$

A második egyenletnek előbb a (-2) -szeresét, majd a 2-szeresét az elsőhöz adva

$$(5) \quad a^* = \frac{x - 2y + g_7n}{4}, \quad b^* = \frac{x + 2y + g_8n}{4}.$$

Innen a^* -ra és b^* -ra mindig kapunk egész megoldást, mert g_7 és g_8 helyére a 0, 1, 2, 3 értékeket téve, n -szeresüknek a 4-gyel való osztás utáni maradéka valamilyen sorrendben 0, 1, 2 és 3, ennél fogva bármennyi az $x - 2y$ és $x + 2y$ ugyanilyen osztásánál fellépő maradék, megválasztható g_7 is, g_8 is úgy, hogy a^* , b^* értéke egész legyen. (Valóban, ha $n = 4k + 1$, úgy $g = 0, 1, 2, 3$ esetén gn maradéka rendre 0, 1, 2, 3, ha pedig $n = 4k + 3$, akkor 0, 3, 2, 1.) Az így megválasztott g értékeket szükség esetén 4-gyel növelve, csökkentve elérhetjük, hogy a^* , b^* -ra teljesül (1).

Bemutatunk egy számpéldát, ami az 1572. feladat 3. ábráját felhasználva olyan lehetőségeket is megvilágít, ha a talált a^* vagy b^* értékkel $a = c + a^* \geq n$, vagy $b = d + b^* \geq n$ adódik.

Legyen $n = 9$, $x = 2$, $y = 7$, ekkor g_7 , g_8 helyén megfelel 4, ill. 0, és így

$$a^* = (2 - 14 + 4 \cdot 9)/4 = 6, \quad b^* = (2 + 14)/4 = 4,$$

meg egyezésben a mondott ábrával. Ugyanis pl. a $\overline{cd} = \overline{04}$ számnak megfelelő (1-gyel növelt, tízes rendszerbeli) 5-ös számtól, a keret alatti előfordulásától jobbra $x = 2$ -t, fölfelé $y = 7$ -et lépve 63-at találjuk, vagyis az 58-cal nagyobb számot, és ez a növekedés a 9-es számrendszerben $58 = 6 \cdot 9 + 4 = \overline{64}$, a talált $\overline{a^*b^*}$.

Az ábra több más $\overline{cd}$ számához is az 58-cal nagyobb számot találjuk, tőle jobbra 2-t és fölfelé 7-et, vagy ami ugyanaz, lefelé is 2-t lépve, amíg csak a megnövelt $(c + 6) \cdot 9 + (d + 4)$ szám egyik jegye sem éri el vagy lépi túl a 9-et. Ilyen esetben viszont az $a = c + a^* = c + 6$, ill. $b = d + b^* = d + 4$ számjegye helyére a 9-cet kisebb $c - 3$, ill. $d - 5$ számjegye lép, ami (4)-ből $g_7 - 4 = 0$, ill. $g_8 - 4 = -4$ mellett adódó $a^* = -3$ -nak, $b^* = -5$ -nek felel meg. Ezek a változások külön-külön $9 \cdot 9 = 81$, ill. $9 \cdot 1 = 9$, együtt pedig $81 + 9 = 90$ csökkenést okoznak az 58 növeléssel várt értékhez képest, pl. 28-hoz képest (aminek $27 = \overline{30}$ felel meg, és itt $c + 6 = 9$) $28 + 58 - 81 = 5$ -öt, 6-hoz képest $6 + 58 - 9 = 55$ -öt, 33-hoz képest ($32 = \overline{35}$) $33 + 58 - 90 = 1$ -et találjuk a mondott helyen.

Meg egyezésben állnak ezek a tények azzal, hogy ha a feladat bélyegzőjét kiegészítenénk az n^2 -nél nagyobb egész számokkal, és pedig az adott előírás szerint, pl. az $(n^2 + 1)$ -et beírnánk az $(n - 1)n + 1$ -től jobbra lefelé 2-t, ill. 1-et lépve található mezőre, akkor $n^2 + 1$ lenyomatai átfednék az 1-es szám lenyomatait, hiszen már magán a bélyegzőn a sorszámok különbsége a két szám oszlopaira nézve $2n$, soraira nézve n lenne. Fordítva úgyis mondhatjuk ezt, hogy egy m szám helyén olvashatunk $m + n^2$ -et is, $m + gn^2$ -et is.

5. Az (x, y) pár előre közölt speciális értékeivel (5)-ből bármely páratlan n esetére táblázatunk eredményeit kapjuk a^* -ra és b^* -ra, vagyis arra, hogy a tetszés szerinti $\overline{cd}$ számtól jobbra, ill. jobbra fölfelé, ill. balra fölfelé, ill. fölfelé álló szám első, ill. második számjegye mennyivel nagyobb, mint c , ill. d . Az első három sávban – ahol x páratlan – az eredmény más és más aszerint, hogy az n alakja $4k + 1$, ill. $4k + 3$.

A táblázat, alsó és felső sávja alapján megmutatjuk, hogy a kövezeten bárhol letéve a keretet, bármelyik sor (vagy oszlop) összege ugyanannyi. Abból adódik majd ez, ha belátjuk, hogy az egy-egy sorban, oszlopban előforduló n szám számjegyei között az n -értékű helyen is, az 1-értékű helyen is minden fajta számjegy pontosan egyszer fordul elő, és így a

$$0 + 1 + 2 + \dots + (n - 2) + (n - 1) = s$$

jelöléssel a sor összege

$$s \cdot n + s = s(n+1) = \frac{(n-1) \cdot n}{2} \cdot (n+1) = \frac{n(n^2-1)}{2};$$

ami pedig a kövezet összes számai összegének,

$$0 + 1 + 2 + \dots + (n^2 - 2) + (n^2 - 1) = \frac{n^2(n^2 - 1)}{2}$$

-nek n -edrészre.

Felhasználjuk, hogy a talált a^* , b^* értékek mindegyike relatív prím a megfelelő n -hez képest, nincs 1-nél nagyobb közös osztójuk. Pl. $n = 4k + 1$ -nek és $a^* = 3k + 1$ -nek minden közös osztója egyszerre mind különbségüknek, k -nak is osztója. Viszont $3k + 1$ -nek és k -nak minden közös osztója hasonlóan osztója $3k + 1 - k - k - k = 1$ -nek is, tehát nem nagyobb 1-nél.

Legyen az n -edrendű kövezetből az $n \times n$ mezős kerettel kijelölt négyzet egy sorában az első számnak pl. az első számjegye c , ekkor a sor n számának első számjegye rendre

$$(6) \quad c, \quad c + a^*, \quad c + 2a^*, \quad c + 3a^*, \quad \dots, \quad c + (n-1)a^*$$

(ill. ahol ez az érték nagyobb, mint n , ott helyette az n -nel való osztásánál fellépő maradék veendő). Mármost ellentmondásra jutunk annak föltevésével, hogy e számjegyek közül kettő megegyező. Ha ugyanis az $(r_2 + 1)$ -edik megegyeznék a korábbi $(r_1 + 1)$ -edikkel – ahol $1 \leq r_1 + 1 < r_2 + 1 \leq n$, azaz $0 \leq r_1 < r_2 \leq n - 1$ –, vagyis

$$c + r_2 a^* - g_2 n = c + r_1 a^* - g_1 n$$

volna, ebből

$$(r_2 - r_1)a^* = (g_2 - g_1)n = g_3 n,$$

következnék, vagyis hogy a bal oldal osztható n -nel. Ámde a^* -nak nincs közös tényezője n -nel, tehát $r_2 - r_1$ osztható vele,

$$r_2 - r_1 = g_4 n, \quad \text{holott} \quad 0 < r_2 - r_1 < n - 1.$$

Mindez ugyanígy érvényes a b^* értékekre.

A sor- és oszlopösszegekre vonatkozó állításunkat ezzel bebizonyítottuk. Eredményünk így is kimondható: ha a bélyegzővel készült kövezen bárhol körülderetünk egy $n \times n$ mezős négyzetet, majd ennek minden számából a két számjegyet két ilyen négyzet megfelelő mezőpárjaira külön-külön írjuk fel, ezek minden sorában is, minden oszlopában is a $0, 1, \dots, (n-1)$ számjegyek mindegyike pontosan egyszer fordul elő. Így szemléletesebb az összegek egyezését belátása. Az ilyen elrendezéseket *Euler* nyomán *latin négyzeteknek* szokás nevezni.

6. Ha sikerülne ugyanezeket belátni az átlós irányú vonalak szám n -eseire ez azt bizonyítaná, hogy a bélyegzővel képezett n -edrendű kövezet pándiagonális, minden átlóján bővös. Tüstént látjuk, hogy ez igaz minden olyan (páratlan) n -re, amely nem osztható 3-mal. Ugyanis a táblázatunk 2. és 3.

x, y	n=4k+1	n=4k+3
(1; 0) jobb szomszéd	$a^* = b^* = 3k + 1$ $= \frac{3n+1}{4}$ (g=3)	$a^* = b^* = k + 1$ $= \frac{n+1}{4}$ (g=1)
	mindkét esetben $a^* - b^* = 0$	
(1; 1) jobb felső	$a^* = k = \frac{n-1}{4},$ (relatív prím) $b^* = k + 1 = \frac{n+3}{4}$	$a^* = 3k + 2,$ $= \frac{3n-1}{4},$ $b^* = 3k + 3$ $= \frac{3n+3}{4}$ (rel.pr.)
(-1; 1) bal felső	$a^* = 3k$ $= \frac{3n-3}{4}$ $b^* = 3k + 1$ $= \frac{3n+1}{4}$ (rel. pr)	$a^* = k$ $= \frac{n-3}{4}$ $b^* = k + 1$ $= \frac{n+1}{4}$ (rel. pr.)
(0; 1) felső	n alakjától függetlenül (vagyis $n = 2k + 1$ -re) $a^* = k = \frac{n-1}{2},$ $b^* = k + 1 = \frac{n+1}{2},$	$a^* + b^* = n$

sávjában talált a^* b^* értékek közül $n = 4k + 1$ oszlopában $a^* = k$ és $b^* = 3k + 1$ valamint $n = 4k + 3$ oszlopában $a^* = 3k + 2$ és $b^* = k + 1$ a fentiekhez hasonlóan mindenestre relatív príme n -hez. A további négy értéknek pedig nem lehet más közös osztója a megfelelői n -nel, mint a 3-as szám, hiszen pl. $b^* = k + 1$ esetében (az (1; 1) sávban)

$$4k + 1 - (k + 1) = 3k,$$

és itt a k tényező relatív prím $4k + 1$ -hez, tehát a mondott n -ekre $3k$ is, $k + 1$ is relatív prím hozzá. Ugyanezek állnak $n = 4k + 1$ oszlopában $a^* = 3k$ -ra és $n = 4k + 3$ oszlopában $b^* = 3k + 3$ -ra, $a^* = k$ -ra. A tekintetbe vett n -ekre tehát a jegyek szétválasztásával képezett két négyzet *átlós latin négyzet*, átlós összegei is egyezők, a keret bárhol való elhelyezése esetében. Ezt láttuk az 1572. feladatban $n = 5$ és 7 esetében.

Ha viszont $n = 3g$, akkor az utoljára vizsgált négy a^* , b^* kifejezés osztható 3 -mal, (6) -nak már a $(g + 1)$ -edik tagja egyezik az elsővel, c -vel, mert $(a^* = 3a^{**}$ jelöléssel)

$$c + ga^* = c + 3ga^{**},$$

és tovább tagról-tagra ismétlődik a megegyezés. A kettéválasztott számjegyek négyzeteinek tehát ilyenkor nincs meg mindkét átlós irányban a „latin” tulajdonsága (az egyik irányban azonban megvan). Meg lehet mutatni, hogy ilyenkor mindkét irányban minden harmadik átlóban megfelelő az összeg, a közbülsőkben viszont attól eltér, ezt láttuk az 1572. feladatban $n = 9$ esetében. $n = 3$ mellett pedig az adódik, hogy a lényegében egyetlen 3 -adrendű bűvös kövezet nem pándiagonális. Ezzel a bélyegzőnkkal készített kövezetek pándiagonáliságának kérdését megválasztottuk.

Megjegyezzük, hogy legutóbbi megállapításunk korántsem jelenti azt, hogy 3 -mal osztható rendszám esetén nem létezik pándiagonális kövezet. Az idézett 3. ábrából ($n = 9$) pándiagonális bűvös négyzet – tehát kövezet is – képezhető a következő változtatásokkal: számait rendre 1 -gyel csökkentjük és átírjuk a 9 alapú számrendszerbe, ezután a számjegyekben három alkalmas cserét hajtunk végre, pl. minden

$$0, 1; \quad 3, 5 \quad 7, 8$$

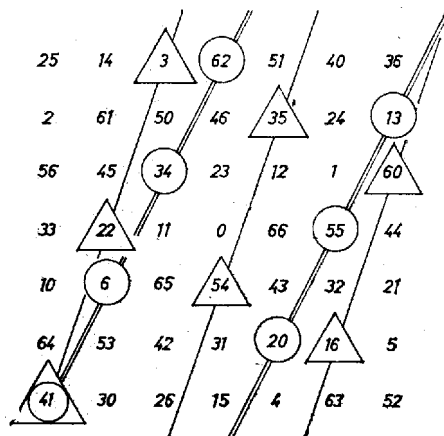
számjegy helyére a 9 -es és 1 -es értékű helyen egyaránt a következőt írjuk:

$$1, 0; \quad 5, 3; \quad 8, 7.$$

A számok növekvő rendjét tekintve ez már nem kétféle lépéssel, pecsételéssel képezett alakzat. Ebből is látható, hogy vannak más típusú bűvös négyzetek is. Már az 5 -ödrendűekre vonatkozóan sem ismeretes ez ideig az összes bűvös négyzetek száma.

7. Az olvasóra hagyjuk annak átgondolását, hogy bélyegzőnk „jobbra 2 -t és fölfelé vagy lefelé 1 -et” lépései azért vezethettek *minden* páratlan n esetén soraikban és oszlopaikban latin négyzetekre bontható négyzetekhez – és az ezekből folyó eredményekhez –, mert a lépések 2 -es, ill. 1 -es komponense minden páratlan n -hez képest relatív prím. Megfelelne helyettük lépéskomponensként minden páratlan n esetére bármely 2^e mezőnyi eltolódás (vízszintesen is, függőlegesen is), ahol $e \geq 0$, egész szám – azonban természetesen a bélyegző 1 -eséről a 2 -esre és az $n + 1$ -esre vivő lépésnek és a komponensek arányának is különbözőnek kell lennie.

8. Az elmondottak gyakorlásául ajánljuk annak vizsgálatát, hogy az így előállított kövezeteken a figyelembe vett $xi + yj$ vektoroktól különböző lépéseket n -szer ismételve, találhatunk-e más, a bűvös állandóval egyező összegeket. Indításként bemutatjuk az $n = 7$ -re és a 7 -es számrendszerben készült ábrát, melyen $\overline{00}$ -tól a $\overline{01}$ szám $2i + j$ -re, az $\overline{10}$ pedig $4i - j$ -re áll (meg lehet mutatni a fenti eljárással a kövezet felírása nélkül előre is, hogy pándiagonális lesz), és pl. a kis körökbe foglalt $(i + 2j)$ lépéssel kapott) számok összege is, a kis háromszögbe foglaltak is egyenlő a bűvös állandóval, mert két összekötött szám jegyei mind a 7 -es, mind az 1 -es helyen különböznek.



Ebben azonban az is lényeges, hogy itt n -ként prímszámot vettünk. A megjelölt számhetesek persze sok más „nagyobb” lépéssel is összejönnek, pl. a háromszögbe foglaltak $2i - j$ -vel, $3i + 2j$ -vel, $2i + 6j$ -vel s i. t.