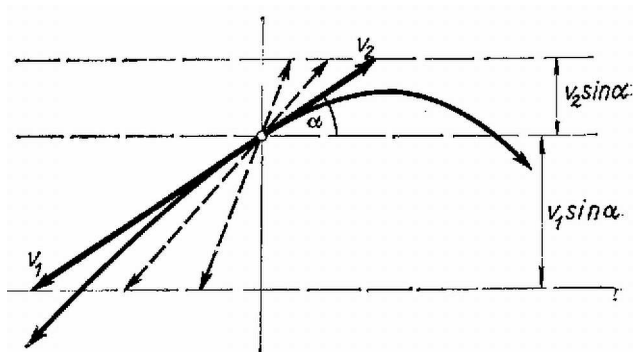


1. Függőlegesen felfelé lőtt lövedék a legnagyobb magasság elérésekor $m_1 = 3$ kg és $m_2 = 6$ kg tömegű részekre robbant szét. A két rész a fellövés helyétől egyenlő távolságokban $T = 4$ másodperces időkülönbséggel ért talajt. Mekkora magasságban robbant szét a lövedék? (A levegő közegellenállását ne vegyük figyelembe.)

(Párkányi László)

Megoldás. A robbanás pillanatában a lövedék nyugalomban volt és részei ellentétes irányokban, α szögben repültek szét v_1 és v_2 kezdősebességekkel (1. ábra).



1. ábra

Az impulzustörvény értelmében $m_1 v_1 = m_2 v_2$. Jelöljük a tömegek arányát k -val, akkor a sebességek aránya $1/k$:

$$k = \frac{m_2}{m_1} = \frac{v_1}{v_2}.$$

A robbanástól a földetérésig t_1 , ill. t_2 idő telt el. A távolságok egyenlőségéből:

$$v_1 \cos \alpha \cdot t_1 = v_2 \cos \alpha \cdot t_2.$$

Tehát az idők hányadosát ugyanaz a k adja meg:

$$(1) \quad k = \frac{t_2}{t_1}.$$

Másrészt tudjuk, hogy az időkülönbség:

$$(2) \quad t_2 - t_1 = T.$$

Az (1) és (2)-ből álló egyenletrendszer megoldása adja az időtartamokat:

$$(3) \quad t_1 = \frac{T}{k-1}, \quad t_2 = \frac{kT}{k-1}.$$

A robbanás helyének h magassága, (1) felhasználásával:

$$h = v_1 \sin \alpha \cdot t_1 + \frac{g}{2} \cdot t_1^2 = k v_2 \sin \alpha \cdot t_1 + \frac{g}{2} \cdot t_1^2, \quad h = -v_2 \sin \alpha \cdot t_2 + \frac{g}{2} \cdot t_2^2.$$

Ez a két egyenlet egyenletrendszer h és $v_2 \sin \alpha$ számára. A (3) alatti értékek felhasználásával a megoldások:

$$h = \frac{g}{4} \cdot \frac{k^2 + 1}{(k-1)^2} \cdot T^2, \quad v_2 \sin \alpha = \frac{g(k+1)}{4k} \cdot T.$$

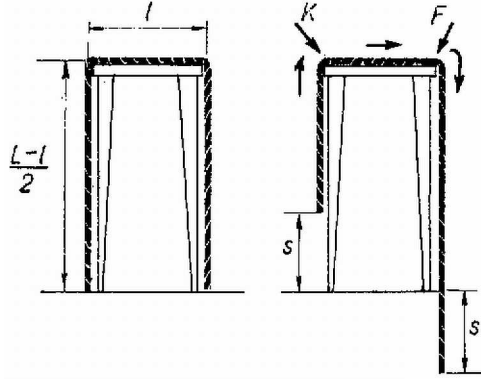
Mivel $t_2/t_1 = m_2/m_1$, azért $m_2 > m_1$ esetén $t_2 > t_1$ tehát ekkor a nagyobb m_2 tömegnek kell felfelé indulnia. A feladat adataiból v_1 és v_2 nem számítható ki, csak $v_1 \sin \alpha$ és $v_2 \sin \alpha$. A lehetséges v_1 és v_2 sebességvektorok végpontjai párhuzamos egyeneseken vannak (1. ábra).

Feladatunk számadataival $k = 2$, $t_1 = 4$ s, $t_2 = 8$ s, $h = 196$ méter, $v_2 \sin \alpha = 14,7$ m/s, $v_1 \sin \alpha = 29,4$ m/s.

2. Vízszintes, l szélességű asztallapon átvetünk egy L hosszúságú, súlyos, tökéletesen hajlékony kötelet. Kezdetben a két lelógó kötélvég egyenlő hosszú. Az egyik kötélvéget kissé meghúzza a kötel mozgásnak indul. Vizsgáljuk meg a kötelben ható feszítőerőt a kötel egyes helyein, mozgás közben! (A súrlódástól tekintsünk el.) Legyen $L = 100$ cm, $l = 20$ cm.

(Wiedemann László)

Megoldás. Kezdetben az asztal mindkét oldalán $(L-l)/2$ hosszúságú kötel lóg le (2. ábra).



2. ábra

A mozgásban levő kötél helyzetét végének s útjával jelöljük meg. A gyorsuló kötél mentén a fonálerő lineárisan változik, hiszen mindegyik keresztmetszetben működő erőnek a mögötte levő kötél tömegét kell gyorsítania. Az asztal élein a fonálerők K és F , a szabad végeken nulla. Célunk K és F meghatározása s függvényében.

Jelentsé σ az 1 méter hosszú kötél tömegét és a a gyorsulást. F -nél a lelógó kötél tömege $[(L-l)/2 + s]\sigma$, az F fonálerő a súly és gyorsító erő különbsége:

$$F = \sigma \left[\frac{L-l}{2} + s \right] g - \sigma \left[\frac{L-l}{2} + s \right] a.$$

A másik élnél lelógó kötél tömege $[(L-l)/2 - s]\sigma$, a K fonálerő a súly és gyorsító erő összege:

$$K = \sigma \left[\frac{L-l}{2} - s \right] g + \sigma \left[\frac{L-l}{2} - s \right] a.$$

Az asztalon fekvő kötélrész gyorsító erő:

$$F - K = \sigma l a.$$

Ez a három egyenlet egy egyenletrendszert alkot, amelynek megoldása:

$$a = \frac{2g}{L} \cdot s,$$

$$F = -\frac{2g\sigma}{L} \cdot s^2 + \frac{g\sigma l}{L} \cdot s + \frac{g\sigma(L-l)}{2},$$

$$K = -\frac{2g\sigma}{L} \cdot s^2 - \frac{g\sigma l}{L} \cdot s + \frac{g\sigma(L-l)}{2}.$$

Ezek a képletek csak addig érvényesek, ameddig K -nál is van még lelógó kötélvég. Ezután új számítást kell végezni. A lelógó kötélvég súlya gyorsítja az egész kötél tömegét:

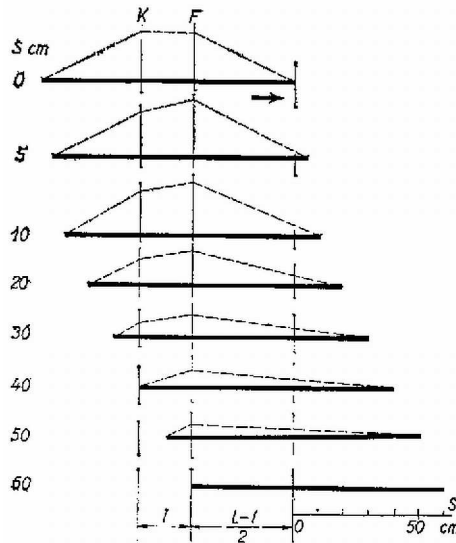
$$\sigma \left[\frac{L-l}{2} + s \right] g = \sigma L a;$$

a K -ban működő fonálerő számára megmarad az előbbi egyenlet. Most az egyenletrendszer megoldása:

$$a = g \cdot \left[\frac{s}{L} + \frac{L-l}{2L} \right],$$

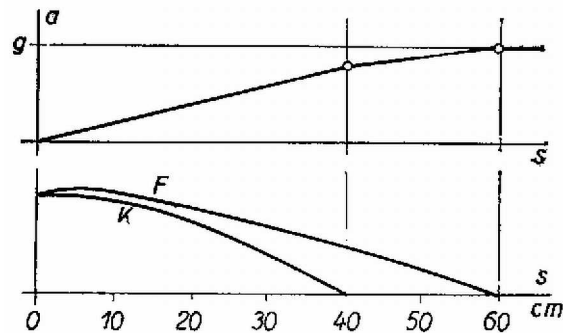
$$F = -\frac{g\sigma}{L} \cdot s^2 + \frac{g\sigma l}{L} \cdot s + \frac{g\sigma(L^2 - l^2)}{4L}.$$

A fonálerők alakulását a 3. ábra mutatja.



3. ábra

Az egymás alatti rajzokon a kötéL helyzete látszik csúszás közben, a lelógó részeket is vízszintes rajzolva. A szaggatott vonal mutatja az illető helyen, a kötéL azon helyzetében a fonálerő nagyságát. A gyorsulást és az asztal széléin jelentkező F és K kötelerőket a megtett út függvényében mutatja a 4. ábra.

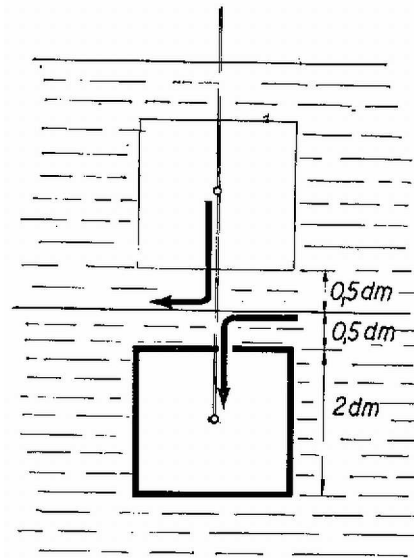


4. ábra

F erőnek maximuma van akkor, amikor a megtett út $l/4$. Számításainkban a gyorsulást és az erőket az út függvényében számítottuk, az időtől való függés megvizsgálása nehezebb feladat.

3. Igen nagy alapterületű medencében vízre $0,8 \text{ p/cm}^3$ fajsúlyú olajat rétegeztünk nagy vastagságban. Egy 2 dm élhosszúságú, $1,7 \text{ p/cm}^3$ fajsúlyú magnéziumkocka úgy lóg egy fonálon, hogy felső lapja $0,5 \text{ dm}$ -re van a határfelület alatt. A kockát felhúzzuk úgy, hogy alsó lapja $0,5 \text{ dm}$ -re legyen a határfelület felett. Mennyi munkát végeztünk?

Megoldás. A kocka térfogata $2^3 = 8 \text{ dm}^3$, súlya $1,7 \cdot 8 \text{ kp} = 13,6 \text{ kp}$.



5. ábra

A kocka súlypontja 3 dm = 0,3 m távolsággal kerül feljebb (5. ábra), ezért a kocka felhúzásához $0,3 \cdot 13,6 \text{ mkp} = 4,08 \text{ mkp}$ munkavégzés kellene. Azonban közben a kocka elhagyott helyére a határfelületről 8 kp súlyú víz folyik le, a súlypontig számítva 1,5 dm = 0,15 m szintkülönbségen át. Innen $0,15 \cdot 8 \text{ mkp} = 1,2 \text{ mkp}$ munkát kapunk. A kocka új helyéről a határfelületre 0,8 · 8 kp = 6,4 kp súlyú olaj folyik le, 0,15 m szintkülönbségen át. Ebből $0,15 \cdot 6,4 \text{ mkp} = 0,96 \text{ mkp}$ munkát kapunk. Összesítve a kocka felhúzásához $(4,08 - 1,2 - 0,96 \text{ mkp}) = 1,92 \text{ mkp}$ munkavégzés szükséges.

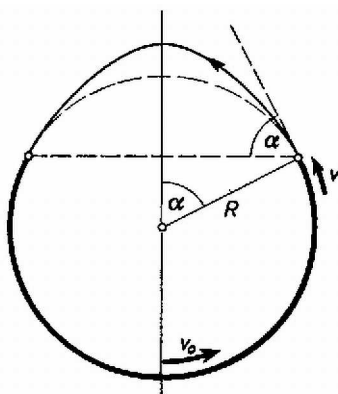
Ez a számítás és ez az eredmény csak akkor érvényes, ha a medence alapterülete igen nagy. Különben megváltozik felhúzás közben a két folyadék határfelületének magassága.

A II. forduló feladatai

1. $R = 8,16$ méter sugarú, függőleges körpálya legmélyebb pontjáról $v_0 = 20 \text{ m/s}$ kezdősebességgel indítunk el egy kis tárgyat és ez a kör belsejében körülfut. A körpálya milyen nagy része hiányozhat, ha azt akarjuk, hogy a mutatvány mégis sikerüljön? (A súrlódást ne vegyük figyelembe. $g = 9,8 \text{ m/s}^2$).

(Bártfai Tamás)

Megoldás. A tárgy helyzetét határozza meg α szög (6. ábra).



6. ábra

Az alsó indítási sebesség legyen mint $\sqrt{gR}$ többszöröse megadva: $v_0^2 = k \cdot gR$. Az α szöggel meghatározott helyzetben meglevő v sebességet az energiamegmaradás törvényével számítjuk:

$$v^2 = v_0^2 - 2gR(1 + \cos \alpha);$$

itt v_0^2 k -val kifejezett értékét használva:

$$(4) \quad v^2 = [(k - 2) - 2 \cos \alpha] \cdot gR.$$

Ha a fal megszűnik, ferde hajítás kezdődik α szög alatt, ezzel a kezdősebességgel. A fal elhagyása akkor nem jelenti a mutatvány kudarcát, ha a hajítási parabola leszálló ága ismét simul a körhöz. Ebből következik, hogy a körpálya szimmetrikus darabjának kell hiányoznia és a parabola tetőpontjának a kör középpontja felett kell lennie. Ezt a feltételt úgy vehetjük legkönnyebben figyelembe, ha felírjuk, hogy az elmozdulás függőleges és vízszintes összetevői egyenlő idő alatt érkeznek el a kör középpontja felett levő maximumba. Az emelkedés ideje $t = v \sin \alpha / g$, a vízszintes elmozdulás ideje $t = R \sin \alpha / (v \cos \alpha)$. Ezeket egyenlővé téve:

$$\frac{v \sin \alpha}{g} = \frac{R \sin \alpha}{v \cos \alpha}.$$

Ebből a feladat feltételének megfelelő α szög $\cos$ -ára ez az eredmény következik:

$$\cos \alpha = \frac{gR}{v^2}$$

(4) felhasználásával:

$$\cos \alpha = \frac{gR}{[(k - 2) - 2 \cos \alpha]gR}.$$

Ebből a feladat megoldása:

$$\cos \alpha = \frac{k - 2 \pm \sqrt{k^2 - 4k - 4}}{4}.$$

Feladatunk számadataival $k = 5$, $\alpha_1 = 0^\circ$, $\alpha_2 = 60^\circ$.

A feladat taglalása a következő érdekességekre figyelmeztet. Az energiamegmaradás törvénye szerint arra a (függőlegestől mért) β szögre nézve, ameddig a tárgy a körön felmehet, ez következik:

$$\frac{mv^2}{2} = mgR(1 + \cos \beta).$$

(4) figyelembevételével $\cos \beta = \frac{k-2}{2}$.

De idáig csak akkor futhat fel a tárgy, ha a pálya olyan, hogy a körön tartja. Arra a (függőlegestől mért) γ szögre nézve, amelynél a tárgy leesik a kör belsejéről, ez érvényes:

$$\frac{mv^2}{R} = mg \cos \gamma.$$

Ugyancsak (4) figyelembevételével:

$$\cos \gamma = \frac{k-2}{3}.$$

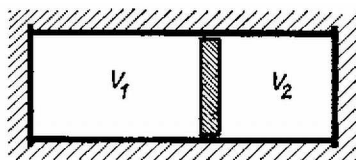
β kisebb, mint γ , tehát a tárgy a lehetséges legnagyobb magasság elérése előtt leesik. Táblázatunk néhány értéket tüntet fel ezekre a szögekre nézve.

k	γ	β	α
2	90°	90°	
3	$70,5^\circ$	60°	
4	48°	0°	
$2 + 2\sqrt{2}$	$18,5^\circ$		$45^\circ \ 45^\circ$
4,9	15°		$18^\circ \ 56^\circ$
5	0°		$0^\circ \ 60^\circ$
6			73°
7			77°

Az indítási sebességet 0-tól kezdve növelve $k = 4$ -ig a tárgy beesik a kör belsejébe, mielőtt az energiamegmaradás törvénye folytán lehetséges magasságot elérte volna. $k = 4$ -nél már elérné a tárgy a kör tetejét, de előbb leesik. $k = 2 + 2\sqrt{2}$ -től kezdve lehet a tető egy darabját elhagyni. $k = 5$ -ig α -ra két használható megoldásunk van; ebben az értéktartományban kétféleképp is elhagyható a körpálya teteje. Érdekes, ha nem vennénk le a tető egy darabját, akkor a mutatvány nem sikerülne, mert bizonyos γ szögnél a tárgy leesne a kör belsejébe. $k = 5$ -től kezdődően a tárgy már képes volna leesés nélkül végigfutni a kör belsejében; a tető elhagyására ekkor már csak egy használható α szög kínálkozik.

2. *Hőszigetelő falú edényben* (7. ábra) $V_1 = 3$ liter térfogatú, $p_1 = 4$ atmoszféra nyomású és $T_1 = 1092^\circ$ K hőmérsékletű héliumgázt egy fal választ el $V_2 = 2$ liter térfogatú, $p_2 = 2,5$ atmoszféra nyomású és $T_2 = 1365^\circ$ K hőmérsékletű héliumgáztól. A válaszfalat elengedjük, ezután a fal sűrűlódás nélkül mozoghat. Mekkora a nyomás az edényben, amikor a fal megáll, a) ha a mozgó fal jó hővezető, b) ha a mozgó fal tökéletesen hőszigetelő?

(Bodó Zalán)



7. ábra

Megoldás. Az edény merev, hőszigetelő fala azt jelenti, hogy a henger belsejében a gázmolekulák mozgási energiájának összege változatlan marad. Ennek a mozgási energiának a mértéke a p nyomás és V térfogat szorzata, amely egyébként nRT -vel egyenlő, ahol n a gáz móljainak száma, T a gáz abszolút hőmérséklete és R a gázállandó: $pV = nRT$. Kezdeti állapotban a gázmolekulák összes mozgási energiája $p_1V_1 + p_2V_2$. A végső állapotban a nyomás

a tartály mindegyik részében ugyanaz a p , a térfogatok V_I , és V_{II} . A végső állapotban a gázmolekulák összes mozgási energiája:

$$pV_I + pV_{II} = p(V_I + V_{II}) = p(V_I + V_2).$$

Ugyanis a gáz össztérfogata ugyanaz marad, $V_I + V_{II} = V_I + V_2$. Mivel a gázmolekulák összes mozgási energiája nem változhat meg:

$$p_1V_I + p_2V_2 = p(V_I + V_2),$$

innen az a közös nyomás, amely a fal megállásakor létrejön:

$$p = \frac{p_1V_I + p_2V_2}{V_I + V_2}$$

Számadatainkkal $p = 3,4$ atmoszféra.

A végső egyensúly egyik feltétele a nyomások egyenlősége. Ehhez az $a)$ esetben a hőmérséklet egyenlősége is járul. Mindegyik gáz-részre alkalmazzuk a gáztörvényt:

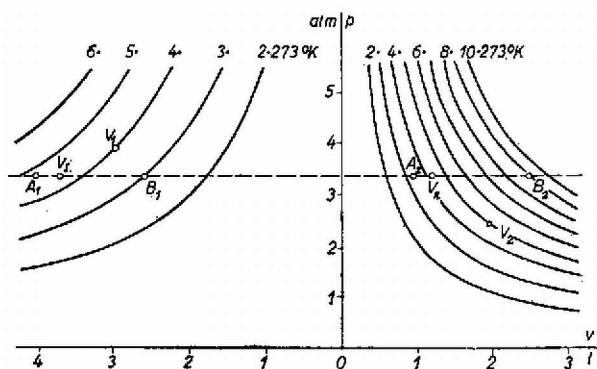
$$\frac{P_1V_I}{T_1} = \frac{pV_I}{T}, \quad \frac{p_2V_2}{T_2} = \frac{pV_{II}}{T}.$$

Ehhez járul a térfogatösszeg állandósága:

$$V_I + V_{II} = V_I + V_2.$$

Így megvan a három egyenletünk V_I , V_{II} és T számára. A mi esetünkben $T_1 = 4 \cdot 273^\circ \text{ K}$, $T_2 = 5 \cdot 273^\circ \text{ K}$. Egyenletrendszerünk megoldása $T = 4,25 \cdot 273^\circ \text{ K} = 1160,25^\circ \text{ K}$, $V_I = 3,75$ liter, $V_{II} = 1,25$ liter.

A $b)$ esetben, amikor a mozgó fal hőszigetelő, hiányzik a hőmérsékletek és térfogatok számára egy feltétel. A *hőmérsékletek és térfogatok tekintetében a feladat határozatlan.*



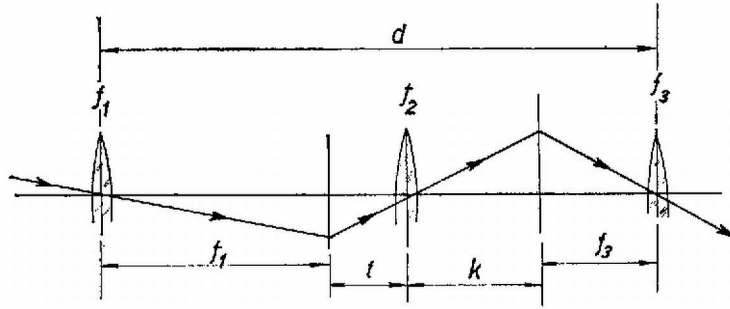
8. ábra

A 8. ábra jobb oldali része a tartály jobb oldali héliumgázának izotermáit tünteti fel. A bal oldalon, fordított irányban a bal oldali tartályrész gázának izotermái láthatók, figyelembe véve, hogy a bal oldali részben levő hélium normáltérfogata (tömege) a jobb oldalinak háromszorosa. A kezdeti állapotot V_I és V_2 pontok tüntetik fel. A végső állapotot feltüntető pontoknak a 3,4 atmoszféra magasságban húzódó vízszintes vonal kell feküdniük, de úgy, hogy abszcisszáik összege az 5 liter össztérfogatnak megfelelő távolság legyen. Az $a)$ esetben, amikor a fal jó hővezetése folytán a hőmérsékletnek ki kell egyenlődnie, a végső állapotot jelző V_I és V_{II} pontok egyenlő hőmérsékletű izotermákon fekszenek. A $b)$ esetben a két rész hőmérséklete az egyensúlyállapotban különböző lehet. Ekkor a végállapotot jelző két pont a 3,4 atmoszféra magasságában húzott egyenesen, 5 liternek megfelelő távolságban akárhol helyezkedhet el, különböző hőmérsékletű izotermákon is. Például lehetséges végállapot A_1 és A_2 (4 liter, $4,533 \cdot 273^\circ \text{ K}$ és 1 liter, $3,4 \cdot 273^\circ \text{ K}$), azután B_1 és B_2 pont (2,5 liter, $2,833 \cdot 273^\circ \text{ K}$ és 2,5 liter, $8,5 \cdot 273^\circ \text{ K}$) stb. Hőszigetelő fal esetében vezetéssel nem tudják az egyik gázzal rész molekulái kinetikus energiájuk egy részét a másik gázzal résznek átadni. Ellenben az egyes gázzal rész molekuláinak mozgási energiája mégis megváltozik annak következtében, hogy a mozgó fal megüti és felgyorsítja azokat. Mindkét esetben az elinduló fal lengéseket végez, amelyeket a gáz belső súrlódása lefékez, megállít. (Az ideális gáznak is van belső súrlódása, mert ez a molekulák véges méretének következménye. A véges méret teszi lehetővé a molekulák kölcsönös ütközését és ezzel a sebességeloszlás egyensúlyának létrejöttét.)

3. Három gyűjtőlencsénk van. Fókusz távolságaik 90 cm, 10 cm és 8 cm. Hogyan kell ezekből a lehető legnagyobb nagyságú távcsövet összeállítani, ha a távcső hossza legfeljebb 150 cm lehet? (A lencsék vékonyak és minden lencsehibától eltekintünk.)

(Bodó Zsolt)

Megoldás. Úgynevezett földi messzelátót készítünk (9. ábra).



9. ábra

f_1 tárgylencse-fókusz távolságban keletkezik az első kép. A második kép a szemlencse előtt, ettől f_3 fókusz távolságban keletkezik. Tehát a d távcsőhosszból a fordítólencse $t + k$ -jára $d - f_1 - f_3$ marad:

$$t + k = d - f_1 - f_3$$

A lencsetörvény a fordítólencsére nézve:

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f_2}.$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$t = \frac{d - f_1 - f_3 - \sqrt{(d - f_1 - f_3)(d - f_1 - f_3 - 4f_2)}}{2},$$

$$k = \frac{d - f_1 - f_3 + \sqrt{(d - f_1 - f_3)(d - f_1 - f_3 - 4f_2)}}{2}.$$

A tárgylencse szögnagyítása f_1/t , a szemlencse szögnagyítása k/f_3 , a teljes szögnagyítás:

$$N = \frac{f_1}{t} \cdot \frac{k}{f_3} = \frac{f_1}{f_3} \cdot \frac{k}{t}.$$

k és t előbbi értékeit felhasználva:

$$N = \frac{f_1}{f_3} \cdot \frac{1 + \sqrt{1 - 4f_2/(d - f_1 - f_3)}}{1 - \sqrt{1 - 4f_2/(d - f_1 - f_3)}}.$$

Különböző összeállításokat próbálunk ki. Nyilván az $f_1 = 90$ cm gyújtótávolságú lencse lesz a tárgylencse és felhasználjuk a teljes $d = 150$ cm hosszúságot. Az alábbi eredményeket nyerjük:

f_1	f_2	f_3	t	k	N
90 cm,	8 cm,	10 cm,	10 cm,	40 cm,	36
90 cm,	10 cm,	8 cm,	13,5 cm,	38,5 cm	32,06.

Látható, hogy a legjobb nagyítást akkor kapjuk, ha a fordító lencse a 8 cm-es, a szemlencse a 10 cm-es gyújtótávolságú. Megvizsgálhatjuk, hogy két lencsét lencserendszerré egyesítve az ezzel összeállított *csillagászati* távcső nagyítása bármely kombinációban kisebb, mint 36.

Az 1970. évi fizika tanulmányi verseny eredménye

I. díj Göndöcs Ferenc (Győr, Révai M. g. III. o. t. Tanára: Takács István).

II. díj Kereszturi András (Budapest, Eötvös J. g. IV. o. t. Tanára: Kellner Dénes).

III. díj Borzsák Péter (Budapest, I. István g. IV. o. t. Tanára: Cseh Géza).

A további helyezettek: 4. Bajmóczy Ervin (Budapest, Fazekas M. g. III. o. t.), 5. Mosó Tamás (Budapest, Eötvös J. g. III. o. t.), 6. Lempert László (Budapest, Radnóti M. g. IV. o. t.), 7. Horváthy Péter (Budapest, Fazekas M. g. IV. o. t.), 8. Dávid Gyula (Budapest, József A. g. III. o. t.), 9. Láz József (Budapest, Eötvös J. g. IV. o. t.), 10. Faragó Tamás (Debrecen, KLTE gyakorló g. III. o. t.).