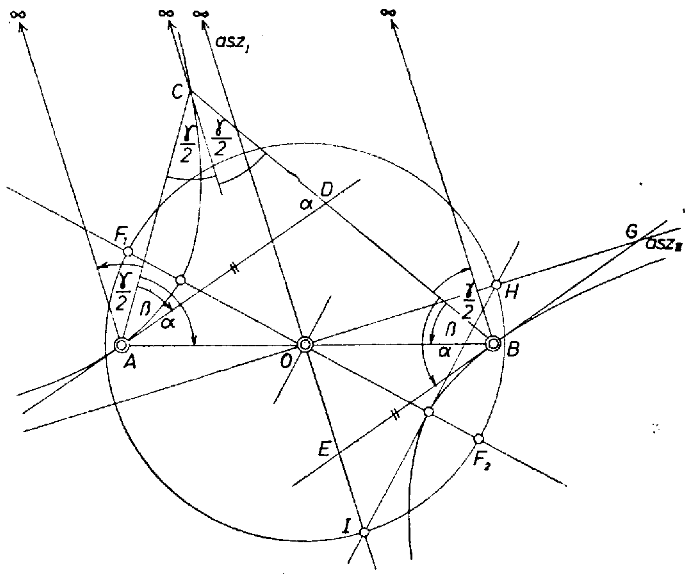
Az 1645. feladat[1] a következő kérdést vetette fel: *Az ABC háromszög AC oldalegyenesét az A pont körül, BC oldalegyenesét a B pont körül forgatni kezdjük egyenlő nagyságú, de ellentétes irányú szögsebességgel. Mi a két forgó egyenes metszéspontjának mértani helye?* Itt projektív geometriai ismeretek segítségével adunk választ a kérdésre. [2]

Az egyenletes sebesség következtében az A tartójú sugársor és a B tartójú sugársor két kongruens, de ellentétes irányítású sugársort alkotnak, ezért a megfelelő egyenesek metszéspontjainak mértani helye egyenlő oldalú hiperbola (vagyis az aszimptoták merőlegesek egymásra).



Az ábrából látni, hogy ha az elfordulás szöge $\dfrac{\gamma}{2}$, akkor a két forgó egyenes éppen párhuzamos, tehát a mértani hely megfelelő pontja, ideális pont. Ez adja az egyik aszimptota irányát. Hasonlóan a rá merőleges irány a másik aszimptota iránya (ellenkező irányú, $90^\circ - \dfrac{\gamma}{2}$ szögű elfordulások). Nyilvánvaló, hogy a keresett mértani helyhez az A és B pontok is hozzátartoznak. Ha ugyanis az A tartójú AC egyenest β-val forgatjuk el, akkor az AD egyenest nyerjük, míg a B tartójú sugársorban a BA egyenest kapjuk. Ebből az is következik, hogy az AD egyenes a hiperbolának A pontbeli érintője, hiszen az elfordulási szöget elég kicsivel akár növelve, akár csökkentve a mértani helynek A-hoz tetszőleges közeli pontját kaphatjuk. Ugyanígy az α elfordulású BE egyenes a B-beli érintő.

Mivel az ACD háromszögben a D-nél levő szög α, azért a két érintő párhuzamos, és így az AB szakasz a hiperbolának átmérője. Így az O felezési pont a hiperbola középpontja. Ezen átmennek az aszimptoták, szögfelezőik pedig a hiperbola tengelyei. A valós tengely azokban a szögtartományokban halad, amelyek A-t és B-t tartalmazzák.

Ismeretes, hogy a két aszimptota bármely érintővel olyan háromszöget határoz meg, amelynek területe állandó. Ha tehát megszerkesztjük az OE és OG szakaszok mértani középarányosát ($OH = OI$) – ahol E és G a BE egyenesnek a két aszimptotával való metszéspontjai –, akkor a HI egyenes a hiperbola csúcsérintője, az F_1, F_2 gyújtópontokat pedig az O körüli, H-n átmenő kör metszi ki a valós tengelyből.

[1] A feladat elemi, valamint koordináta-geometriai megoldását lásd ezen számban, 107. o.

[2] A szükséges fogalmak, előismeretek megtalálhatók pl. a szerző most megjelent Középiskolai Szakköri Füzetében: *Vigassy Lajos:* Projektív geometria. Tankönyvkiadó, Budapest, 1970.